

N u m e r i s c h e   V e r f a h r e n

1.   B e r i c h t

Behandlung linearer Eigenwertaufgaben mit Hilfe  
der Hamilton - Cayleyschen Gleichung

Der Bericht umfaßt

Darmstadt, 23.7.1940

1 Titelblatt  
36 Seiten Text

gez. K.Hessenberg

Dr.-Ing. Karl Hessenberg  
als Bearbeiter



Prof. Dr. A. Walther  
Institutsdirektor

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
Bezeichnungsweise für Matrizen und Vektoren	2
Einleitung	2
A. Erstes Verfahren	3
A 1 Berechnung der Eigenwerte	3
A 2 Berechnung der Eigenlösungen	4
A 3 Benutzung eines Vektors $\gamma_0$ , der nicht alle Eigenlösungen enthält	7
A 4 Mehrfache Eigenwerte	11
a) Einheits-Teilmatrizen	11
b) Nachweis der vollständigen und eindeutigen Zerlegung	13
c) Erweiterung des Begriffes der Eigenlösung	16
d) Zerlegung des Vektors $\gamma_0$ in Eigenlösungen ersten und höheren Grades	17
A 5 Genauigkeitsverlust durch Bildung kleiner Differenzen aus großen Zahlen	19
B. Zweites Verfahren	22
B 1. Vorbemerkung	22
B 2. Herleitung des Verfahrens	22
B 3. Durchführung des Verfahrens bei völligen oder angenähertem Verschwinden eines Vektors $\gamma_v^{(v)}$	26
B 4. Bestimmung der Eigenlösungen	29
B 5. Praktische Durchführung des Verfahrens	29
C. Durchrechnung eines praktischen Zahlenbeispiels	
C 1. Anwendung des ersten Verfahrens	31
a) Berechnung der Vektoren $\gamma_v = \alpha^v \cdot \gamma_0$	32
b) Auflösung des linearen Gleichungssystems	32
c) Berechnung der Eigenwerte als Wurzeln der Gleichung	32
d) Berechnung von Eigenlösungen	33
C 2. Anwendung des zweiten Verfahrens	34
a) Berechnung der Matrix	34
b) Ausmultiplizieren der Determinante nach Gleichung (69)	35
c) Auflösung der Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$	35
d) Berechnung der Eigenlösungen	35
Zusammenfassung	36

Bezeichnungsweise für Matrizen und Vektoren

Große Frakturbuchstaben: quadratische Matrizen  $\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\mathcal{E}$  = Einheitsmatrix,  $|\alpha|$  = Determinante der Matrix  $\alpha$ .

Kleine Frakturbuchstaben: Vektoren  $\mathfrak{e} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(eine Spalte mit n Komponenten)

E i n l e i t u n g

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$(1) \quad \lambda x_\mu - \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \quad (\mu=1, \dots, n),$$

in Matrixschreibweise durch die Gleichung

$$(1') \quad (\lambda \mathcal{E} - \alpha) \mathfrak{e} = 0$$

dargestellt, besitzt bekanntlich<sup>1)</sup> für diejenigen  $\lambda$ -Werte eine von 0 verschiedene Lösung  $\mathfrak{e} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , für die die Gleichungsdeterminante

$$(2) \quad |\lambda \mathcal{E} - \alpha| \equiv \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \dots + k_{n-1} \lambda + k_n \equiv \varphi(\lambda)$$

verschwindet. Die Werte  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), die die Gleichung

$$(3) \quad |\lambda \mathcal{E} - \alpha| = 0$$

erfüllen, heißen Eigenwerte<sup>2)</sup> der Matrix  $\alpha$ , die entsprechenden Lösungen  $\mathfrak{e}_i$  Eigenlösungen.

Zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenlösungen können zahlreiche verschiedenartige Verfahren benutzt werden. Das Ausmultiplizieren<sup>3)</sup> der Determinante  $|\lambda \mathcal{E} - \alpha|$  erfordert besonders bei vielreihigen Gleichungssystemen oft eine recht umfangreiche und umständliche Rechenarbeit. Näherungsverfahren<sup>1)4)</sup> führen, besonders wenn

1) R.v.Mises und H.Pollaczek-Geiringer: Praktische Verfahren zur Gleichungsauflösung. Z. angew. Math. Mech. 9 (1929) 152-164.

2) Im Gegensatz zu dieser Definition der Eigenwerte  $\lambda$  werden mitunter deren Kehrwerte  $1/\lambda$  als die Eigenwerte der Matrix bezeichnet; vgl. z.B. Fußnote 1.

3) Mehnke: Praktische Lösung der Grundaufgaben ..... Math. Ann. 103 (1930) 300-318.

4) C.G.Jacobi: Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säkularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen. J. reine angew. Math. 30 (1846) 51-94.

nur einzelne Eigenwerte und Eigenlösungen gebraucht werden, zuweilen rascher zum Ziel; sie sind jedoch nur unter besonderen Voraussetzungen mit Vorteil anwendbar.

In der vorliegenden Abhandlung wird im ersten Teil ein besonders einfaches Verfahren behandelt, das auf einer Anwendung der Hamilton - Cayleyschen Gleichung<sup>5)</sup> beruht und in seinem Grundgedanken bereits bekannt ist<sup>6)</sup>. Das Verfahren eignet sich nicht nur zur Ermittlung der Eigenwerte, sondern ermöglicht auch mit verhältnismäßig geringem Arbeitsaufwand die Berechnung der entsprechenden Eigenlösungen. Das Verfahren hat jedoch den Nachteil, daß man in gewissen Fällen nur einzelne Eigenwerte mit befriedigender Genauigkeit, die anderen dagegen nur sehr ungenau oder überhaupt nicht findet. Es wird deshalb noch ein weiteres Verfahren entwickelt, dessen Durchführung ebenfalls nur einen mäßigen Arbeitsaufwand erfordert, das jedoch in jedem Fall anwendbar ist und das jeden unnötigen Genauigkeitsverlust vermeidet.

#### A. Erstes Verfahren.

##### A 1. Berechnung der Eigenwerte

Die Hamilton - Cayleysche Gleichung sagt aus, daß zwischen den ersten  $n$  Potenzen einer beliebigen  $n$ -reihigen Matrix  $\alpha$  die Beziehung besteht

$$(4) \quad \varphi(\alpha) \equiv \alpha^n + k_1 \alpha^{n-1} + \dots + k_{n-1} \alpha + k_n \mathcal{E} = 0,$$

worin die Koeffizienten  $k_1, \dots, k_n$  die gleichen sind wie die des Polynoms (3).

Durch Multiplikation eines beliebigen Vektors  $z_0$  mit dem Matrizen-Polynom  $\varphi(\alpha)$  erhält man nach Gleichung (4)

$$(5) \quad \varphi(\alpha) z_0 = \alpha^n z_0 + k_1 \alpha^{n-1} z_0 + \dots + k_{n-1} \alpha z_0 + k_n z_0 = 0.$$

Die hierin vorkommenden Vektoren

$$(6) \quad z_1 = \alpha z_0, \quad z_2 = \alpha z_1 = \alpha^2 z_0, \quad \dots, \quad z_n = \alpha z_{n-1} = \alpha^n z_0$$

können durch wiederholtes Multiplizieren des Vektors mit der Matrix  $\alpha$  mit verhältnismäßig geringem Arbeitsaufwand berechnet werden.

5) Bôcher-Beck: Einführung in die höhere Algebra. Leipzig 1910. S. 319.

6) Frazer, Duncan and Collar: Elementary Matrices. Cambridge 1938. S. 141 ff.

Damit erhält man nach (5) und (6) die Vektorgleichung

$$(7) \quad k_n z_0 + k_{n-1} z_1 + \dots + k_1 z_{n-1} + z_n = 0$$

Diese Vektorgleichung, in der sämtliche Vektoren  $z_0, \dots, z_n$  bekannt sind, enthält  $n$  lineare Gleichungen für die gesuchten  $n$  Koeffizienten.

Beispiel: Gegeben die Matrix  $\alpha = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

Durch wiederholtes Multiplizieren eines willkürlich gewählten Vektors, z.B. eines Einheitsvektors  $z_0$  mit der Matrix  $\alpha$  erhält man

$$z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, z_1 = \alpha \cdot z_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, z_2 = \alpha \cdot z_1 = \begin{pmatrix} 142 \\ 83 \\ 24 \end{pmatrix}, z_3 = \alpha \cdot z_2 = \begin{pmatrix} 2132 \\ 1280 \\ 404 \end{pmatrix}.$$

Für die gesuchten Koeffizienten  $k_1, k_2, k_3$  der Gleichung (4) ergibt sich damit gemäß (7) das lineare Gleichungssystem

$$(7') \quad \begin{array}{rclcl} 1 \cdot k_3 + 10 \cdot k_2 & + & 142 \cdot k_1 & + & 2132 & = & 0 \\ & & 5 \cdot k_2 & + & 83 \cdot k_1 & + & 1280 & = & 0 \\ & & 1 \cdot k_2 & + & 24 \cdot k_1 & + & 404 & = & 0 \end{array},$$

aus dem die Werte  $k_1 = -20$ ,  $k_2 = 76$ ,  $k_3 = -52$  leicht berechnet werden können. Durch Auflösung der Gleichung

$$\lambda^3 - 20\lambda^2 + 76\lambda - 52 = 0$$

erhält man die drei gesuchten Eigenwerte der Matrix

$$\lambda_1 = 15,23575, \quad \lambda_2 = 3,88595, \quad \lambda_3 = 0,87830.$$

## A 2. Berechnung der Eigenlösungen

Sind die  $n$  Eigenwerte  $\lambda_i$  sämtlich voneinander verschieden, so entspricht jedem Eigenwert  $\lambda_i$  genau eine, bis auf einen willkürlich wählbaren Proportionalitätsfaktor bestimmte Eigenlösung  $p_i$ . Die den  $n$  verschiedenen Eigenwerten entsprechenden Eigenlösungen  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sind voneinander linear unabhängig.

Bestünde nämlich zwischen ihnen eine lineare Beziehung

$$(8) \quad \sum \alpha_i p_i = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_n p_n = 0,$$

worin mindestens ein Wert  $\alpha_i$  von Null verschieden sein möge, so wäre auch

$$(8') \quad \alpha \cdot \sum \alpha_i p_i = \lambda_1 \alpha_1 p_1 + \lambda_2 \alpha_2 p_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n p_n = 0$$

und allgemein

$$(8'') \quad \alpha^p \cdot \sum \alpha_i p_i = \lambda_1^p \alpha_1 p_1 + \lambda_2^p \alpha_2 p_2 + \dots + \lambda_n^p \alpha_n p_n = 0.$$

Die Gleichungen (8) bis (8<sup>n</sup>) für  $p = 0, 1, \dots, n-1$  bilden ein  $n$ -reihiges homogenes Gleichungssystem für die Vektoren  $\alpha_i; \varrho_i$ . Da die Determinante dieses Gleichungssystems, die Vandermond'sche Determinante

$$(9) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i=2,3,\dots,n \\ k=1,2,\dots,i-1}} (\lambda_i - \lambda_k)$$

nur dann verschwindet, wenn entgegen der Voraussetzung mindestens zwei Eigenwerte einander gleich sind, so müssen alle  $\alpha_i; \varrho_i = 0$  sein, d.h. eine lineare Beziehung (8) zwischen den Eigenlösungen  $\varrho_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) kann nicht bestehen.

Aus der linearen Unabhängigkeit der  $n$  Eigenlösungen  $\varrho_1, \dots, \varrho_n$  folgt, daß jeder beliebige  $n$ -dimensionale Vektor  $z$  eindeutig als lineare Zusammensetzung aus diesen  $n$  Eigenlösungsvektoren dargestellt werden kann. Das gilt also auch für den bei dem obigen Verfahren benutzten Vektor  $z_0$ .

$$(10) \quad z_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varrho_i = \sum_{i=1}^n \varrho'_i,$$

worin die Vektoren  $\varrho'_i = \alpha_i \varrho_i$  den Eigenlösungen  $\varrho_i$  proportional, also, falls  $\alpha_i \neq 0$ , selbst Eigenlösungen sind.

Durch wiederholtes Multiplizieren der Gleichung (10) mit der Matrix  $\alpha$  erhält man für  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  die folgenden Ausdrücke

$$(11) \quad \begin{cases} \varrho'_1 + \varrho'_2 + \dots + \varrho'_n = z_0 \\ \lambda_1 \varrho'_1 + \lambda_2 \varrho'_2 + \dots + \lambda_n \varrho'_n = z_1 \\ \dots \\ \lambda_1^{n-1} \varrho'_1 + \lambda_2^{n-1} \varrho'_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} \varrho'_n = z_{n-1} \end{cases}$$

Nachdem die Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  bereits bei der Durchführung des obigen Verfahrens berechnet wurden und ebenso auch die Eigenwerte  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), stellen die Gleichungen (11) ein gewöhnliches lineares Gleichungssystem für die Vektoren  $\varrho'_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) dar, die auf diese Weise sehr einfach und bequem errechnet werden können.

Durch Anwendung der C r a m e r'schen Regel erhält man z.B. für  $\varrho'_i$

$$(12) \quad \varrho'_i = \frac{\begin{vmatrix} z_0 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}}$$

Die Nennerdeterminante ist die bereits erwähnte Vandermond'sche Determinante (9). Die Zählerdeterminante ist ebenfalls durch alle  $(\lambda_i - \lambda_k)$  teilbar, soweit  $i > k > 1$ , wie man sofort erkennt, wenn man die  $k$ -te Spalte von der  $i$ -ten Spalte ( $i > k > 1$ ) subtrahiert. Man kann daher den Ausdruck (12) durch alle diese  $(\lambda_i - \lambda_k)$  kürzen. Im Nenner bleiben dann die Faktoren  $(\lambda_i - \lambda_1)$  für  $i = 2, 3, \dots$ ,

$$(13) \quad \prod_{i=2, \dots, n} (\lambda_i - \lambda_1) = (-\lambda_1)^{n-1} + (-\lambda_1)^{n-2} \cdot \sum_{i>1} \lambda_i + (-\lambda_1)^{n-3} \cdot \sum_{i>k>1} \lambda_i \lambda_k + \\ + (-\lambda_1)^{n-4} \cdot \sum_{i>k>\ell>1} \lambda_i \lambda_k \lambda_\ell + \dots + (\lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \cdot \dots \cdot \lambda_2) .$$

Der Zähler des Ausdrucks (12) unterscheidet sich von dem Nenner nur dadurch, daß die Werte  $\lambda_i^v$  durch die entsprechenden Vektoren  $z_v$  zu ersetzen sind. Man erhält also, indem man noch Zähler und Nenner mit  $(-1)^{n-1}$  multipliziert

$$(14) \quad z_1'' = \frac{z_{n-1} - z_{n-2} \cdot \sum_{i>1} \lambda_i + z_{n-3} \cdot \sum_{i>k>1} \lambda_i \lambda_k - \dots + (-1)^{n-1} z_0 \cdot \prod_{i=2, \dots, n} \lambda_i}{\prod_{i=2, \dots, n} (\lambda_i - \lambda_1)}$$

Im allgemeinen wird es genügen, nur den Zählerausdruck von (14) zu berechnen. Denn der Zähler stellt einen Vektor  $z_1''$  dar, der ebenfalls der gesuchten Eigenlösung  $z_1$  proportional ist. Nur wenn man aus besonderen Gründen feststellen will, wie groß der in  $z_0$  enthaltene Anteil der Eigenlösung  $z_1$  ist, muß auch der Nennerausdruck berechnet und der Zählervektor  $z_1''$  durch den Nenner dividiert werden.

Beispiel: In dem obigen Zahlenbeispiel ergibt sich für die dem Eigenwert  $\lambda_1 = 15,23575$  entsprechende Eigenlösung gemäß (14) ohne Berücksichtigung des Nenners

$$z_1'' = z_2 - (\lambda_2 + \lambda_3) z_1 + (\lambda_2 \cdot \lambda_3) \cdot z_0 \\ = \begin{pmatrix} 142 \\ 83 \\ 24 \end{pmatrix} - 4,76425 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 3,41303 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97,7705 \\ 59,1787 \\ 19,2357 \end{pmatrix} .$$

Ebenso können die den Eigenwerten  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  entsprechenden Eigenlösungen

$$z_2'' = z_2 - (\lambda_1 + \lambda_3) z_1 + (\lambda_1 \cdot \lambda_3) z_0 , \\ z_3'' = z_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) z_1 + (\lambda_1 \cdot \lambda_2) z_0$$

berechnet werden.

Man kann die Genauigkeit einer jeden errechneten Eigenlösung  $z_i$  und zugleich die des entsprechenden Eigenwertes  $\lambda_i$  nachprüfen, indem man die Eigenlösung mit der Matrix  $\alpha$  multipliziert und die Komponenten des Vektors  $\alpha \cdot z_i$  mit denen des Vektors  $z_i$  vergleicht.

Im obigen Beispiel erhält man

$$\alpha \cdot e'' = \begin{pmatrix} 1489,6060 \\ 901,6318 \\ 293,0707 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 e'' = 15,23575 \cdot e'' = \begin{pmatrix} 1489,6069 \\ 901,6319 \\ 293,0703 \end{pmatrix},$$

also eine recht gute Übereinstimmung.

### A 3. Benutzung eines Vektors $z_0$ , der nicht alle Eigenlösungen enthält

Das obige Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte ist nur dann ohne weiteres anwendbar, wenn die Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  voneinander linear unabhängig sind; denn nur dann ist das in Gleichung (7) enthaltene lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten  $k_1, \dots, k_n$  eindeutig lösbar.

Sind dagegen die  $n$  Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ , die als Spalten einer quadratischen Matrix

$$Z = (z_0 z_1 \dots z_{n-1})$$

betrachtet werden können, ein- oder mehrfach voneinander linear abhängig, so hat die Determinante dieser Matrix den Wert 0. Das Gleichungssystem (7) ist dann nicht eindeutig lösbar.

Es soll jedoch im folgenden gezeigt werden, daß man auch in diesem Fall das beschriebene Verfahren verwenden kann, um wenigstens die in  $z_0$  enthaltenen Eigenlösungen und die entsprechenden Eigenwerte zu berechnen.

Der Rang der  $n$ -reihigen Matrix  $Z$  sei  $m$ ; zwischen den  $n$  Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  mögen also  $(n-m)$  lineare Beziehungen bestehen. Dann gelten folgende Sätze:

1.) Die ersten  $m$  Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$  sind voneinander linear unabhängig.

Bestünde zwischen den Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$  eine lineare Abhängigkeit, so gäbe es einen Vektor  $z_k$  ( $k \leq m-1$ ), der durch lineare Zusammensetzung aus den vorangehenden Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}$  dargestellt werden kann:

$$z_k = \beta_0 z_0 + \beta_1 z_1 + \dots + \beta_{k-1} z_{k-1};$$

dann wären aber alle folgenden Vektoren

$$z_{k+1} = \alpha \cdot z_k = \beta_0 z_1 + \beta_1 z_2 + \dots + \beta_{k-1} z_k,$$

$$z_{k+2} = \alpha \cdot z_{k+1} = \beta_0 z_2 + \beta_1 z_3 + \dots + \beta_{k-1} z_{k+1}, \dots$$

ebenfalls durch lineare Zusammensetzung aus den  $k$  Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}$  darstellbar; die Matrix  $Z$  hätte also entgegen der Voraussetzung den Rang  $k \leq m-1$ .

2.) Der  $(m+1)$ -te Vektor  $z_m = \alpha^m z_0$  kann eindeutig durch lineare Zusammensetzung aus den  $m$  ersten Vektoren dargestellt werden

$$(15) \quad z_m + \gamma_1 z_{m-1} + \gamma_2 z_{m-2} + \dots + \gamma_m z_0 = 0.$$

Denn da die Matrix  $Z$  nach der Voraussetzung den Rang  $m$  hat, besteht zwischen den  $(m+1)$  Spalten  $z_0, \dots, z_m$  eine lineare Beziehung, in der der Koeffizient von  $z_m$  von Null verschieden sein muß, weil sonst (entgegen Satz 1) zwischen den übrigen  $m$  Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$  eine lineare Abhängigkeit bestünde.

Bestünde mehr als eine lineare Beziehung gemäß (15), z.B.

$$z_m + \gamma_1 z_{m-1} + \dots + \gamma_m z_0 = 0,$$

$$z_m + \gamma'_1 z_{m-1} + \dots + \gamma'_m z_0 = 0,$$

so enthielte die Differenz der beiden Gleichungen im Widerspruch zu Satz 1 eine Beziehung zwischen  $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$ .

Die Koeffizienten  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  sind also durch die  $(m+1)$  Vektoren  $z_0, \dots, z_m$  eindeutig bestimmt.

3.) Das Polynom der Matrix  $\alpha$  gemäß Gleichung (4)

$$\varphi(\alpha) \equiv \alpha^n + k_1 \alpha^{n-1} + \dots + k_{n-1} \alpha + k_n \mathcal{E}$$

ist teilbar durch das mit den Koeffizienten  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  der Gleichung (15) gebildete Polynom

$$(16) \quad \psi(\alpha) \equiv \alpha^m + \gamma_1 \alpha^{m-1} + \dots + \gamma_{m-1} \alpha + \gamma_m \mathcal{E},$$

d.h. es gibt ein Polynom  $(n-m)$ -ten Grades

$$(17) \quad \chi(\alpha) \equiv \alpha^{n-m} + \vartheta_1 \alpha^{n-m-1} + \dots + \vartheta_{n-m} \mathcal{E},$$

das die Identität

$$(18) \quad \varphi(\alpha) \equiv \psi(\alpha) \cdot \chi(\alpha)$$

erfüllt.

Wäre  $\varphi(\alpha)$  nicht durch  $\psi(\alpha)$  teilbar, so gäbe es ein Restpolynom  $\rho(\alpha)$  von geringerem als  $m$ -ten Grade

$$(19) \quad \begin{aligned} \rho(\alpha) &\equiv \varphi(\alpha) - \psi(\alpha) \cdot \chi(\alpha) \\ &\equiv \xi_1 \alpha^{m-1} + \xi_2 \alpha^{m-2} + \dots + \xi_m \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Nun ist nach Gleichung (5)  $\varphi(\alpha) \cdot z_0 = 0$  und nach Gleichung (15)

$$\psi(\alpha) \cdot z_0 = 0.$$

Folglich wäre nach Gleichung (19) auch

$$\rho(\alpha) \cdot z_0 = \varphi(\alpha) \cdot z_0 - \psi(\alpha) \cdot \chi(\alpha) \cdot z_0 = 0,$$

also

$$\begin{aligned} \rho(\alpha) \cdot z_0 &= \xi_1 \alpha^{m-1} z_0 + \xi_2 \alpha^{m-2} z_0 + \dots + \xi_m z_0 \\ &= \xi_1 z_{m-1} + \xi_2 z_{m-2} + \dots + \xi_m z_0 = 0. \end{aligned}$$

Da die Matrix  $Z$  voraussetzungsgemäß den Rang  $m$  hat, kann aber nach Satz 1 zwischen den Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$  keine lineare Beziehung bestehen. Folglich müssen sämtliche Koeffizienten

$\xi_1, \dots, \xi_m$  verschwinden. Es ist also  $\rho(\alpha) \equiv 0$ , also nach Gleichung (19)

$$\varphi(\alpha) \equiv \psi(\alpha) \cdot \chi(\alpha).$$

4.) Sämtliche Wurzeln der Gleichung

$$(20) \quad \psi(\lambda) = \lambda^m + \gamma_1 \lambda^{m-1} + \dots + \gamma_{m-1} \lambda + \gamma_m = 0$$

sind Eigenwerte der Matrix  $\alpha$ .

Die soeben nachgewiesene Identität  $\varphi \equiv \psi \cdot \chi$  gilt, da  $\varphi, \psi$  und  $\chi$  ganze rationale Funktionen sind, für jede eindeutig potenzierbare Veränderliche, insbesondere also auch für skalare Größen. Es ist also  $\varphi(\lambda) \equiv \psi(\lambda) \cdot \chi(\lambda)$ .

Aus dieser Identität folgt, daß die  $n$  Wurzeln der Gleichung  $\varphi(\lambda) = 0$  übereinstimmen mit den  $m$  Wurzeln der Gleichung  $\psi(\lambda) = 0$  und den  $(n-m)$  Wurzeln der Gleichung  $\chi(\lambda) = 0$ . Da nun die  $n$  Wurzeln der Gleichung  $\varphi(\lambda) = 0$  die Eigenwerte der Matrix  $\alpha$  sind, folgt, daß sämtliche Wurzeln der Gleichung (20) ebenfalls Eigenwerte der Matrix  $\alpha$  sind.

Man kann also auch dann, wenn die  $n$ -reihige Matrix  $\zeta = (\zeta_0 \zeta_1 \dots \zeta_{n-1})$  nur den Rang  $m$  ( $m < n$ ) besitzt, auf dem beschriebenen Wege  $m$  Eigenwerte der Matrix  $\alpha$  berechnen.

Es muß nun noch untersucht werden, ob auch die Eigenlösungen in dem hier betrachteten Sonderfall in der oben angegebenen Weise ermittelt werden können.

Zunächst sei wieder vorausgesetzt, daß alle  $n$  Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $\alpha$  voneinander verschieden seien. Die entsprechenden  $n$  Eigenlösungen  $p_i$  sind dann, wie früher gezeigt, voneinander linear unabhängig.

Zwischen der Matrix  $\zeta = (\zeta_0 \zeta_1 \dots \zeta_{n-1})$  und der Matrix  $\mathcal{H}' = (p_1' p_2' \dots p_n')$ , deren Spalten die in  $\zeta_0$  enthaltenen Eigenlösungsanteile  $p_i' = \alpha_i p_i$  sind, besteht nach Gleichung (11) die Beziehung

$$(21) \quad \zeta = \mathcal{H}' \cdot \mathcal{W}, \text{ worin } \mathcal{W} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Da die Determinante der Matrix  $\mathcal{W}$  nach Gleichung (9) von Null verschieden ist, haben die Matrizen  $\zeta$  und  $\mathcal{H}'$  den gleichen Rang. Sind von den  $n$  Eigenlösungen  $m$  mit einem von Null verschiedenen Anteil  $p_i' = \alpha_i p_i$  in  $\zeta_0$  enthalten, so hat die Matrix  $\mathcal{H}'$  und folglich auch die Matrix  $\zeta$  genau den Rang  $m$ .

Nach Gleichung (15) und (6) ist dann

$$\psi(\alpha) \cdot \zeta_0 = (\alpha^m + \gamma_1 \alpha^{m-1} + \dots + \gamma_{m-1} \alpha + \gamma_m \mathcal{E}) \cdot \zeta_0 = 0$$

nach Gleichung (10) also

$$(22) \quad \psi(\alpha) \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(\alpha) p_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(\lambda_i) p_i = 0$$

Da alle Eigenlösungen  $p_i$  voraussetzungsgemäß von Null verschieden und voneinander linear unabhängig sind, folgt aus (22)

$$(23) \quad \alpha_i \cdot \psi(\lambda_i) = 0 \quad \text{für } i=1, 2, \dots, n.$$

In dem Vektor  $z_0$  mögen die Eigenlösungen  $p_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) mit von Null verschiedenen Anteilen  $\alpha_i p_i$  enthalten sein. Es sei also

$$\begin{aligned} \alpha_i &\neq 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, m, \\ \alpha_i &= 0 \quad \text{für } i = m+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Aus (23) folgt damit

$$(24) \quad \psi(\lambda_i) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

Die  $m$  Wurzeln der gemäß (15) aus  $z_0, z_1, \dots, z_m$  ermittelten Gleichung (20) sind also identisch mit den  $m$  Eigenwerten  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, m$ ), die den in  $z_0$  enthaltenen Eigenlösungen  $p_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) entsprechen.

Beispiel:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 & -6 \\ -3 & 3 & 14 & -9 \\ -1 & -6 & -9 & 21 \end{pmatrix} \quad z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad z_2 = \begin{pmatrix} 55 \\ 30 \\ -42 \\ -18 \end{pmatrix} \quad z_3 = \begin{pmatrix} 564 \\ 297 \\ -501 \\ -235 \end{pmatrix}$$

Die vier Vektoren  $z_0, \dots, z_3$  sind voneinander linear abhängig. Die Auflösung des Gleichungssystems

$$\text{ergibt} \quad z_3 + y_1 z_2 + y_2 z_1 + y_3 z_0 = 0$$

$$y_1 = -17, \quad y_2 = 71, \quad y_3 = -55.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^3 - 17\lambda^2 + 71\lambda - 55 = 0$$

sind

$$\lambda_1 = 11, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 1.$$

Den einzigen noch fehlenden Eigenwert kann man in diesem Fall leicht aus der Diagonalsumme berechnen

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i = \sum_{\alpha=1}^4 \alpha_{\alpha\alpha} = 46, \quad \lambda_4 = 29.$$

Die in  $z_0$  enthaltenen Eigenlösungen findet man in der oben beschriebenen Weise nach Gleichung (14); z.B.

$$p'_1 = \frac{z_2 - (5+1)z_1 + (5 \cdot 1)z_0}{(11-5) \cdot (11-1)} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,2 \\ -0,4 \\ -0,2 \end{pmatrix}.$$

A 4. Mehrfache Eigenwerte

Auch dann, wenn die gegebene Matrix  $\alpha$  unter ihren  $n$  Eigenwerten zwei oder mehr einander gleiche Werte besitzt, eignet sich das beschriebene Verfahren ohne grundsätzliche Einschränkung oder Änderung zur Berechnung der Eigenwerte. Meistens wird in diesem Fall die Determinante der Matrix  $\zeta = (\zeta_0 \zeta_1 \dots \zeta_{n-1})$  verschwinden und das Gleichungssystem (7) für die Unbekannten  $k_1, \dots, k_n$  daher nicht eindeutig lösbar sein. Hat die Matrix  $\zeta$  den Rang  $m$  ( $m < n$ ), so können, wie soeben gezeigt wurde, immerhin  $m$  Eigenwerte der Matrix  $\alpha$  auf dem angegebenen Wege berechnet werden.

Für die Berechnung der Eigenlösungen wurde oben die Verschiedenheit sämtlicher Eigenwerte vorausgesetzt; denn nur unter dieser Voraussetzung besitzt die Matrix  $n$  eindeutig (bis auf einen unbestimmten oder willkürlich festgelegten skalaren Faktor) definierte Eigenlösungen, so daß jeder beliebige Vektor  $\zeta_0$  eindeutig in diese  $n$  Eigenlösungen zerlegt werden kann.

Im folgenden wird gezeigt, daß auch dann, wenn unter den  $n$  Eigenwerten der Matrix  $\alpha$  sich nur  $m$  voneinander verschiedene Werte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  befinden, jeder Vektor  $\zeta_0$  eindeutig in  $m$  Eigenlösungsvektoren  $p_1, p_2, \dots, p_m$  zerlegt werden kann, wobei allerdings eine Erweiterung des Begriffes der Eigenlösung notwendig ist und ferner natürlich auch hier die Anteile einzelner Eigenlösungen gleich Null sein können.

a) Einheits-Teilmatrizen

Die  $n$ -reihige Matrix  $\alpha$  möge  $m$  voneinander verschiedene Eigenwerte besitzen, und zwar sei  $\lambda_{(i)}$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) eine  $p_{(i)}$ -fache Wurzel ( $p_{(i)} \geq 1$ ) der Gleichung  $|\alpha - \lambda \xi| = 0$ . Es ist also  $\sum p_{(i)} = n$ .

(Die eingeklammerten Indizes dienen zur Kennzeichnung der  $m$  voneinander verschiedenen Eigenwerte).

Nach Gleichung (4) ist

$$(25) \prod_{i=1, \dots, m} (\alpha - \lambda_{(i)} \xi)^{p_{(i)}} = (\alpha - \lambda_{(1)} \xi)^{p_{(1)}} \cdot (\alpha - \lambda_{(2)} \xi)^{p_{(2)}} \cdot \dots \cdot (\alpha - \lambda_{(m)} \xi)^{p_{(m)}} = 0,$$

wobei die Reihenfolge der Faktoren beliebig vertauscht werden kann.  $\lambda_{(k)}$  sei einer der  $m$  verschiedenen Eigenwerte  $\lambda_{(i)}$ . Die Matrix

$$(26) \mathcal{B}_{(k)} = \frac{\prod_{i \neq k} (\alpha - \lambda_{(i)} \xi)^{p_{(i)}}}{\prod_{i \neq k} (\lambda_{(i)} - \lambda_{(i)})^{p_{(i)}}}$$

(worin die Produkte in Zähler und Nenner über  $i=1,2,\dots,m$  außer  $i=k$  zu bilden sind und demgemäß der Nenner eine von Null verschiedene Zahl ist) erfüllt nach Gleichung (25) die Bedingung

$$(27) \quad (\alpha - \lambda_{(k)} \xi)^{P_{(k)}} \cdot \mathfrak{B}_{(k)} = 0.$$

Bildet man weiter die Matrix

$$(28) \quad \mathfrak{B}_{(k)} - \xi = \frac{\prod_{i \neq k} (\alpha - \lambda_{(i)} \xi)^{P_{(i)}} - \prod_{i \neq k} (\lambda_{(k)} \xi - \lambda_{(i)} \xi)^{P_{(i)}}}{\prod_{i \neq k} (\lambda_{(k)} - \lambda_{(i)})^{P_{(i)}}},$$

so steht im Zähler dieses Ausdrucks die Differenz zweier gleichlautender Polynome von  $\alpha$  und  $\lambda_{(k)} \xi$ . Da jeder Ausdruck  $\alpha^v - (\lambda_{(k)} \xi)^v$  durch  $(\alpha - \lambda_{(k)} \xi)$  teilbar ist

$$\alpha^v - (\lambda_{(k)} \xi)^v = \alpha^v - \lambda_{(k)}^v \xi^v = (\alpha - \lambda_{(k)} \xi) \cdot (\alpha^{v-1} + \lambda_{(k)} \alpha^{v-2} + \dots + \lambda_{(k)}^{v-1} \xi),$$

enthält auch die Differenz der beiden Polynome in (28) und folglich auch die Matrix  $\mathfrak{B}_{(k)} - \xi$  den Faktor  $(\alpha - \lambda_{(k)} \xi)$ . Entsprechend enthält die Matrix  $(\mathfrak{B}_{(k)} - \xi)^{P_{(k)}}$  den Faktor  $(\alpha - \lambda_{(k)} \xi)^{P_{(k)}}$ . Aus Gleichung (27) folgt daher

$$(29) \quad (\xi - \mathfrak{B}_{(k)})^{P_{(k)}} \cdot \mathfrak{B}_{(k)} = 0.$$

Die Matrix

$$(30) \quad \xi_{(k)} = \xi - (\xi - \mathfrak{B}_{(k)})^{P_{(k)}} = \mathfrak{B}_{(k)} \cdot \left( \binom{P_{(k)}}{1} \cdot \xi - \binom{P_{(k)}}{2} \cdot \mathfrak{B}_{(k)} + \dots \right)$$

enthält als Faktor die Matrix  $\mathfrak{B}_{(k)}$ . Aus (29) und (30) folgt

$$(31) \quad (\xi - \xi_{(k)}) \cdot \mathfrak{B}_{(k)} = (\xi - \mathfrak{B}_{(k)})^{P_{(k)}} \cdot \mathfrak{B}_{(k)} = 0,$$

also

$$(31') \quad \xi_{(k)} \cdot \mathfrak{B}_{(k)} = \mathfrak{B}_{(k)}$$

und aus (31) und (30)

$$(\xi - \xi_{(k)}) \cdot \xi_{(k)} = 0,$$

$$(32) \quad \xi_{(k)}^2 = \xi_{(k)}.$$

Ferner folgt aus (27) und (30)

$$(33) \quad (\alpha - \lambda_{(k)} \xi)^{P_{(k)}} \cdot \xi_{(k)} = 0.$$

Zwischen zwei Matrizen  $\mathfrak{B}_{(i)}, \mathfrak{B}_{(k)}$  gemäß Gleichung (26), die verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_{(i)}, \lambda_{(k)}$  entsprechen, besteht, da  $\mathfrak{B}_{(i)}$  definitionsgemäß den Faktor  $(\alpha - \lambda_{(k)} \xi)^{P_{(k)}}$  enthält, nach Gleichung (27) die Beziehung

$$\mathfrak{B}_{(i)} \cdot \mathfrak{B}_{(k)} = 0$$

und folglich nach Gleichung (30)

$$(34) \quad \xi_{(i)} \cdot \xi_{(k)} = 0.$$

Die den  $m$  verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_{(i)}$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) zugeordneten Matrizen  $\xi_{(i)}$  besitzen ferner, wie im folgenden noch nachgewiesen wird, die Eigenschaft, daß ihre Summe gleich der Ein-

heitsmatrix ist

$$(35) \quad \sum_{i=1}^m \xi_{ii} = \xi.$$

Sie sollen deshalb als "Einheits-Teilmatrizen" bezeichnet werden

b) Nachweis der vollständigen und eindeutigen Zerlegung

Zum Nachweis der Gleichung (35), die übrigens auch aus der Elementarteiler-Theorie<sup>7)</sup> abgeleitet werden kann, werden zwei bekannte Hilfssätze benutzt.

Die Anzahl der linearen Beziehungen, die unabhängig voneinander zwischen den Spalten oder den Zeilen einer n-reihigen Matrix bestehen, möge als "Rangabfall" der Matrix bezeichnet werden. Eine n-reihige Matrix vom Range r hat also den Rangabfall n-r.

Hilfssatz 1

Der Rangabfall des Produktes aus zwei (allgemein m) n-reihigen Matrizen ist nicht kleiner als der Rangabfall einer dieser Matrizen und nicht größer als die Summe der Rangabfälle beider (bzw. aller m) Matrizen<sup>8)</sup>.

Hilfssatz 2

Hat die Matrix  $\alpha$  die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , so hat die auf die p-te Potenz erhobene Matrix  $\alpha^p$  die Eigenwerte  $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p$ .

Der Beweis dieses Satzes folgt aus der Identität

$$|\alpha - \lambda \xi| \equiv (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda),$$

indem man die Veränderliche  $\lambda$  durch  $\varepsilon_v \cdot \lambda$  ersetzt, worin  $\varepsilon_v$  eine der p Einheitswurzeln  $\sqrt[p]{1}$  ist. Durch Multiplikation der p Identitäten

$$|\alpha - \varepsilon_v \lambda \xi| \equiv (\lambda_1 - \varepsilon_v \lambda)(\lambda_2 - \varepsilon_v \lambda) \dots (\lambda_n - \varepsilon_v \lambda) \quad (v=1, \dots, p)$$

erhält man mit

$$(\lambda_i - \varepsilon_1 \lambda)(\lambda_i - \varepsilon_2 \lambda) \dots (\lambda_i - \varepsilon_p \lambda) = \lambda_i^p - \lambda^p$$

und

$$(\alpha - \varepsilon_1 \lambda \xi)(\alpha - \varepsilon_2 \lambda \xi) \dots (\alpha - \varepsilon_p \lambda \xi) = \alpha^p - \lambda^p \xi$$

für die neue Veränderliche  $\xi = \lambda^p$  die Identität

$$|\alpha^p - \xi \xi| \equiv (\lambda_1^p - \xi)(\lambda_2^p - \xi) \dots (\lambda_n^p - \xi).$$

7) Bôcher-Beck: Einführung in die höhere Algebra. Leipzig 1910. Kapitel XX ff.

8) Bôcher-Beck: Einführung in die höhere Algebra. Leipzig 1910. S. 84.

$\lambda_{(i)}$  sei ein  $p_{(i)}$ -facher Eigenwert der Matrix  $\alpha$ . Die Matrix  $(\alpha - \lambda_{(i)} \xi)$  besitzt also den  $p_{(i)}$ -fachen Eigenwert 0; ebenso hat nach Hilfssatz 2 die Matrix  $(\alpha - \lambda_{(i)} \xi)^{p_{(i)}}$  genau den  $p_{(i)}$ -fachen Eigenwert 0. Hieraus folgt, daß in dem Ausdruck

$$(36) \quad |\eta \xi - (\alpha - \lambda_{(i)} \xi)^{p_{(i)}}| = \eta^n + k'_1 \eta^{n-1} + \dots + k'_{n-1} \eta + k'_n$$

die letzten  $p_{(i)}$  Koeffizienten  $k'_s$  ( $s = n - p_{(i)} + 1, \dots, n$ ) verschwinden, der Koeffizient  $k'_{n-p_{(i)}}$  dagegen von Null verschieden sein muß.

Bekanntlich<sup>3)</sup> sind aber die Koeffizienten  $k_s$  der Gleichung (3), abgesehen von dem Vorzeichen, gleich der Summe der Hauptunterdeterminanten  $s$ -ter Ordnung der betreffenden Matrix  $\alpha$ , der Koeffizient  $k'_{n-p_{(i)}}$  der Gleichung (36) also gleich der Summe der Hauptunterdeterminanten  $(n - p_{(i)})$ -ter Ordnung der Matrix  $(\alpha - \lambda_{(i)} \xi)^{p_{(i)}}$ . Da  $k'_{n-p_{(i)}} \neq 0$  ist, können also die Unterdeterminanten  $(n - p_{(i)})$ -ter Ordnung von  $(\alpha - \lambda_{(i)} \xi)^{p_{(i)}}$  nicht sämtlich verschwinden, d.h. der Rang der Matrix  $(\alpha - \lambda_{(i)} \xi)^{p_{(i)}}$  ist mindestens  $n - p_{(i)}$ , ihr Rangabfall also höchstens  $p_{(i)}$ .

Die Matrix  $\mathfrak{L}_{(k)}$  nach Gleichung (26) ist, abgesehen von dem endlichen skalaren Faktor im Nenner, das Produkt aus  $(n-1)$  Matrizen  $(\alpha - \lambda_{(i)} \xi)^{p_{(i)}}$  ( $i=1, \dots, k-1, k+1, \dots, m$ ), von denen jede, wie gezeigt, höchstens den Rangabfall  $p_{(i)}$  besitzt. Nach obigem Hilfssatz 1 beträgt also der Rangabfall des Produktes aus diesen  $(m-1)$  Matrizen höchstens  $\sum_{i \neq k} p_{(i)}$ . Der Rang der Matrix  $\mathfrak{L}_{(k)}$  beträgt also mindestens

$$n - \sum_{i \neq k} p_{(i)} = p_{(k)},$$

d.h. die Matrix  $\mathfrak{L}_{(k)}$  enthält unter ihren Spalten mindestens  $p_{(k)}$  voneinander linear unabhängige Vektoren. Das gleiche gilt nach Gleichung (31') und Hilfssatz 1 auch für die Einheits-Teilmatrix  $\mathfrak{L}_{(k)}$ .

Die Gesamtzahl der in den  $m$  Matrizen  $\mathfrak{L}_{(i)}$  enthaltenen, voneinander linear unabhängigen Spalten beträgt also mindestens  $\sum p_{(i)} = n$ .

Dabei kann eine lineare Abhängigkeit zwischen den Spalten verschiedener Einheits-Teilmatrizen nicht bestehen. Bestünde eine solche, so könnte diese in folgender Form geschrieben werden

$$(8a) \quad \alpha_{(1)} \mathfrak{L}_{(1)} + \alpha_{(2)} \mathfrak{L}_{(2)} + \dots + \alpha_{(m)} \mathfrak{L}_{(m)} = 0,$$

worin jeder der Vektoren  $p_{(i)}$  linear aus den Spalten der entsprechenden Matrix  $\mathcal{E}_{(i)}$  zusammengesetzt ist. Aus den Gleichungen (32) und (34) folgt also für diese Vektoren

$$(37) \quad \mathcal{E}_{(i)} \cdot p_{(i)} = p_{(i)}, \quad \mathcal{E}_{(i)} \cdot p_{(k)} = 0 \quad \text{für } k \neq i.$$

Durch Multiplikation der Gleichung (3a) mit  $\mathcal{E}_{(i)}$  erhält man

$$\mathcal{E}_{(i)} \cdot \sum_{k=1}^m \alpha_{(k)} p_{(k)} = \mathcal{E}_{(i)} \cdot \alpha_{(i)} p_{(i)} + \mathcal{E}_{(i)} \cdot \sum_{k \neq i} \alpha_{(k)} p_{(k)} = \alpha_{(i)} p_{(i)} + 0 = 0,$$

also  $\alpha_{(i)} p_{(i)} = 0$  und zwar für  $i=1, 2, \dots, n$ . Gleichung (3a) ist also nur durch Verschwinden sämtlicher  $\alpha_{(i)} p_{(i)}$  erfüllbar; zwischen den Vektoren  $p_{(1)}, p_{(2)}, \dots, p_{(m)}$  kann keine lineare Beziehung bestehen.

Hieraus folgt aber auch, daß der Rang der Einheits-Teilmatrizen  $\mathcal{E}_{(i)}$  nicht größer sein kann als  $p_{(i)}$ . Hätte eine der Matrizen  $\mathcal{E}_{(i)}$  einen Rang größer als  $p_{(i)}$ , so müßte es unter den Spalten der  $n$  Einheits-Teilmatrizen mehr als  $\sum p_{(i)} = n$  voneinander linear unabhängige Vektoren geben, was bei Vektoren  $n$ -ter Ordnung nicht möglich ist.

Man kann demnach aus den Spalten der Einheits-Teilmatrizen  $n$  voneinander linear unabhängige Vektoren  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) zusammensetzen. Jeder beliebige Vektor  $z$ <sup>9)</sup> kann dann eindeutig als eine lineare Zusammensetzung aus diesen  $n$  Vektoren dargestellt werden

$$z = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i.$$

Für jeden der Vektoren  $p_i$  gelten die Gleichungen (37) und folglich

$$(38) \quad \left( \sum_{k=1}^m \mathcal{E}_{(k)} \right) \cdot p_i = p_i.$$

Nach (38) gilt daher auch für jeden Vektor  $z$ , und insbesondere auch für die Spalten der Einheitsmatrix

$$(39) \quad \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_{(i)} \cdot z = z$$

und folglich auch für die Einheitsmatrix selbst

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{E}_{(i)} = \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_{(i)} \cdot \mathcal{E} = \mathcal{E},$$

was zu beweisen war.

Die Eindeutigkeit dieser Zerlegung in Einheits-Teilmatrizen ist übrigens bereits durch die Bedingungen (33) und (35) sichergestellt. Gäbe es nämlich noch eine andere Gruppe von Matrizen  $\mathcal{E}'_{(i)}$ ,

9) Vektoren gleicher ( $n$ -ter) Ordnung natürlich immer vorausgesetzt.

die die gleichen Bedingungen erfüllt

$$(33'), (35') \quad (\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^{p_{(i)}} \cdot \xi'_{(i)} = 0, \quad \sum \xi'_{(i)} = \xi,$$

so wäre nach Gleichung (26) und (33')

$$\xi_{(i)} \cdot \xi'_{(i)} = 0 \quad (i \neq k),$$

also nach Gleichung (30) auch

$$\xi_{(i)} \cdot \xi'_{(i)} = 0 \quad (i \neq k),$$

und folglich nach Gleichung (35) und (35')

$$\xi'_{(i)} = (\sum \xi_{(i)}) \cdot \xi'_{(i)} = \xi_{(i)} \cdot \xi'_{(i)},$$

$$\xi_{(i)} = \xi_{(i)} \cdot (\sum \xi'_{(i)}) = \xi_{(i)} \cdot \xi'_{(i)}.$$

Damit ist gezeigt, daß  $\xi'_{(i)} = \xi_{(i)}$ , die Zerlegung also eindeutig ist.

### c) Erweiterung des Begriffes der Eigenlösung

Gemäß Gleichung (39) kann jeder beliebige Vektor  $z_0$  in eindeutiger Weise in  $m$  Vektoren

$$(40) \quad \xi_{(i)} = \xi_{(i)} \cdot z_0$$

zerlegt werden, die den  $m$  voneinander verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_{(i)}$  der Matrix  $\alpha$  zugeordnet sind. Diese Vektoren  $\xi_{(i)}$  sind nicht in jedem Falle Eigenlösungen in dem nach Gleichung (1') festgelegten Sinne; die Bedingung  $(\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E}) \cdot \xi_{(i)} = 0$  ist nicht immer erfüllt. Dagegen ist nach Gleichung (33) stets

$$(41) \quad (\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^{p_{(i)}} \cdot \xi_{(i)} = (\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^{p_{(i)}} \cdot \xi_{(i)} \cdot z_0 = 0.$$

Ein Vektor  $\xi_{(i)}$ , der die Bedingungen

$$(42) \quad (\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^t \cdot \xi_{(i)} = 0,$$

$$(43) \quad (\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^{t-1} \cdot \xi_{(i)} \neq 0$$

erfüllt, soll eine "Eigenlösung  $t$ -ten Grades" heißen. Zur Kennzeichnung des Grades einer Eigenlösung dienen hochgestellte, in eckige Klammern gesetzte Zahlen bzw. Buchstaben:

$$\xi_{(i)}^{(t)} = \text{Eigenlösung } t\text{-ten Grades.}$$

Ist  $p_{(i)}^{[t]}$  eine dem Eigenwert  $\lambda_{(i)}$  entsprechende Eigenlösung  $t$ -ten Grades ( $t > 1$ ), so ist der Vektor

$$(44) \quad (\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E}) \cdot p_{(i)}^{[t]} = p_{(i)}^{[t-1]}$$

eine Eigenlösung  $(t-1)$ -ten Grades, denn nach Gleichung (42) und (43) ist

$$(\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^{t-1} \cdot (\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E}) p_{(i)}^{[t]} = (\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^{t-1} p_{(i)}^{[t-1]} = 0$$

$$(\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^{t-2} \cdot (\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E}) p_{(i)}^{[t]} = (\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^{t-2} p_{(i)}^{[t-1]} \neq 0.$$

Allgemein ist

$$(44') \quad (\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^s \cdot p_{(i)}^{[t]} = p_{(i)}^{[t-s]} \quad (s < t)$$

eine Eigenlösung  $(t-s)$ -ten Grades. Auf die Einschränkung  $s < t$  kann auch verzichtet werden, indem man als Eigenlösungen nullten oder negativen Grades den Vektor 0 definiert:

$$(45) \quad p_{(i)}^{[t]} = 0 \quad \text{für } t \leq 0.$$

d) Zerlegung des Vektors  $z_0$  in Eigenlösungen ersten oder höheren Grades

Der Vektor  $z_0$  setzt sich gemäß Gleichung (39) und (40) aus höchstens  $m$  Eigenlösungen ersten oder höheren Grades zusammen, die den  $m$  voneinander verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_{(i)}$  entsprechen

$$(46) \quad z_0 = p_{(1)}^{[t_1]} + p_{(2)}^{[t_2]} + \dots + p_{(m)}^{[t_m]}.$$

Die einzelnen Eigenlösungen  $p_{(i)}^{[t_i]}$  sind nach Gleichung (41) höchstens vom  $p_{(i)}$ -ten Grade, wenn  $\lambda_{(i)}$  ein  $p_{(i)}$ -facher Eigenwert ist:

$$(47) \quad t_{(i)} \leq p_{(i)}.$$

Der einfachste und zugleich praktisch wichtigste Fall liegt dann vor, wenn alle Eigenlösungen von erstem Grade sind. Der Vektor  $z_0$  setzt sich dann aus  $m$  Eigenlösungen ersten Grades zusammen, die, wie unter 3) beschrieben, aus den Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_m$  berechnet werden können.

Besitzt die Matrix  $\alpha$  auch Eigenlösungen höheren Grades und sind solche in dem Vektor  $z_0$  enthalten, so erhält man bei wieder-

holtem Multiplizieren des Ausdruckes (46) mit der Matrix  $\alpha$  für die einzelnen Eigenlösungs-Anteile nach Gleichung (44) und (44')

$$(48) \begin{cases} \alpha \cdot p_{(i)}^{[t_i]} = \lambda_{(i)} p_{(i)}^{[t_i]} + (\alpha - \lambda_{(i)} E) p_{(i)}^{[t_i]} = \lambda_{(i)} p_{(i)}^{[t_i]} + p_{(i)}^{[t_i-1]} \\ \alpha^2 \cdot p_{(i)}^{[t_i]} = \alpha \cdot (\lambda_{(i)} p_{(i)}^{[t_i]} + p_{(i)}^{[t_i-1]}) = \lambda_{(i)}^2 p_{(i)}^{[t_i]} + 2 \lambda_{(i)} p_{(i)}^{[t_i-1]} + p_{(i)}^{[t_i-2]} \\ \dots \\ \alpha^v \cdot p_{(i)}^{[t_i]} = \lambda_{(i)}^v p_{(i)}^{[t_i]} + \binom{v}{1} \lambda_{(i)}^{v-1} p_{(i)}^{[t_i-1]} + \dots + \binom{v}{v} p_{(i)}^{[t_i-v]} \end{cases}$$

In diesen Ausdrücken sind nach Gleichung (42) und (43) nur die ersten  $t_i$  Vektoren  $p_{(i)}^{[t_i]}, \dots, p_{(i)}^{[1]}$  von Null verschieden. Die Vektoren

$$(49) \quad z_v = \alpha^v \cdot z_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{\mu=0}^{t_i-1} \binom{v}{\mu} \cdot \lambda_{(i)}^{v-\mu} \cdot p_{(i)}^{[t_i-\mu]}$$

können demnach in eindeutiger Weise in  $n' = \sum_{i=1}^m t_i \leq n$  Eigenlösungsvektoren  $p_{(i)}^{[t_i-\mu]}$  zerlegt werden.

Zur Ermittlung dieser  $n'$  Eigenlösungen ersten oder höheren Grades und der entsprechenden Eigenwerte werden die  $(n'+1)$  Vektoren  $z_0, z_1 = \alpha \cdot z_0, \dots, z_{n'} = \alpha^{n'} z_0$  benötigt. Diese  $(n'+1)$  Vektoren sind, da sie sich aus  $n'$  Eigenlösungsvektoren linear zusammensetzen, voneinander linear abhängig. Man kann also entsprechend Gleichung (15) eine Gleichung aufstellen, aus der die Eigenwerte, soweit zugehörige Eigenlösungen in  $z_0$  enthalten sind, berechnet werden können.

Die  $n'$  Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{n'-1}$  sind jedoch, ebenso wie die  $n'$  Eigenlösungsvektoren  $p_{(i)}^{[t_i-\mu]}$  voneinander linear unabhängig. Betrachtet man nämlich in den Gleichungen (49) für  $v = 0, 1, \dots, (n'-1)$  die Eigenlösungsvektoren als Unbekannte, so stellt die aus den Koeffizienten  $\binom{v}{\mu} \cdot \lambda_{(i)}^{v-\mu}$  gebildete Gleichungsdeterminante eine verallgemeinerte Form der Vandermondeschen Determinante dar und hat den Wert

$$\prod_{\substack{k=2, \dots, m \\ i=1, \dots, k-1}} (\lambda_{(k)} - \lambda_{(i)})^{t_i \cdot t_k}$$

ist also, da  $i \neq k$  ist, stets von Null verschieden. Die Vektoren  $p_{(i)}^{[t_i-\mu]}$  können also, nachdem die Eigenwerte berechnet sind, aus den  $n'$  Vektoren  $z_v = \alpha^v \cdot z_0$  eindeutig ermittelt werden.

Beispiel:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 11 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} 104 \\ 88 \\ 188 \end{pmatrix}, \quad z_3 = \begin{pmatrix} 1388 \\ 1344 \\ 2724 \end{pmatrix}$$

Die Auflösung des Gleichungssystems

$$z_0 \cdot k_3 + z_1 \cdot k_2 + z_2 \cdot k_1 + z_3 = 0$$

ergibt  $k_1 = -18$ ,  $k_2 = 60$ ,  $k_3 = -56$ ; hieraus die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 14, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

In diesem Falle ist  $n' = n = 3$ , denn die ersten drei Vektoren  $z_0$ ,  $z_1, z_2$  sind voneinander linear unabhängig.

Die entsprechenden Eigenlösungen ergeben sich nach Gleichung

$$(49) \quad \begin{aligned} z_0 &= p_{(1)} + p_{(2)}^{[2]} \\ z_1 &= \lambda_{(1)} p_{(1)} + \lambda_{(2)} p_{(2)}^{[2]} + p_{(2)}^{[1]} \\ z_2 &= \lambda_{(1)}^2 p_{(1)} + \lambda_{(2)}^2 p_{(2)}^{[2]} + 2\lambda_{(2)} p_{(2)}^{[1]} \end{aligned}$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach  $p_{(1)}, p_{(2)}^{[2]}, p_{(2)}^{[1]}$  ergibt

$$p_{(1)} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad p_{(2)}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad p_{(2)}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß  $p_{(2)}^{[2]}$  tatsächlich eine Eigenlösung zweiten Grades ist, denn es ist

$$\begin{aligned} (\alpha - \lambda_{(2)} \xi) \cdot p_{(2)}^{[2]} &= p_{(2)}^{[1]} \neq 0, \\ (\alpha - \lambda_{(2)} \xi)^2 \cdot p_{(2)}^{[2]} &= (\alpha - \lambda_{(2)} \xi) p_{(2)}^{[1]} = 0. \end{aligned}$$

#### A 5. Genauigkeitsverlust durch Bildung kleiner Differenzen aus großen Zahlen

Wenn alle  $n$  Eigenwerte der gegebenen Matrix voneinander verschieden sind und der gewählte Vektor  $z_0$  Anteile sämtlicher Eigenlösungen enthält, so müßte bei genauer Rechnung die Determinante  $|z|$  der aus den Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  gebildeten Matrix von Null verschieden sein und folglich das in Gleichung (7) enthaltene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar sein.

Bei der praktischen Anwendung des Verfahrens kann es aber vorkommen, daß zwar in dem gewählten Vektor  $z_0$  alle  $n$  Eigenlösungen mit beachtlichen Anteilen enthalten sind, daß jedoch in den Vektoren

$$(50) \quad z_\nu = \alpha^\nu \cdot z_0 = \sum \lambda_i^\nu \alpha_i p_i = \lambda_1^\nu \cdot \left( \alpha_1 p_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^\nu \alpha_2 p_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^\nu \alpha_n p_n \right)$$

( $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ ) die Anteile der Eigenlösungen  $p_2, \dots, p_n$  gegenüber dem Anteil von  $p_1$  infolge der begrenzten Dezimalstellenzahl

der Rechnung entweder überhaupt nicht mehr oder nur mit unbefriedigender Genauigkeit erfaßt werden.

Wenn beispielsweise bereits in dem Vektor  $z_{n-2} = \alpha^{n-2} \cdot z_0$  sämtliche Eigenlösungen außer  $e_1$  völlig verschwunden sind, so sind die beiden letzten Spalten der Determinante  $|z|$ , nämlich  $z_{n-2} = \lambda_1^{n-2} \cdot \alpha_1 e_1$  und  $z_{n-1} = \lambda_1^{n-1} \cdot \alpha_1 e_1$ , einander proportional und folglich  $|z| = 0$ . Ebenso verschwindet die Determinante auch dann, wenn in dem Vektor  $z_{n-3}$  bereits alle bis auf zwei Eigenlösungen (z.B.  $e_1$  und  $e_2$ ) verschwunden sind und allgemein dann, wenn in irgendeinem der Vektoren  $z_\nu$  ( $\nu = 0, 1, \dots, n-2$ ) bereits mehr als  $\nu$  Eigenlösungen verschwunden sind, der Vektor  $z_\nu$  sich also aus weniger als  $(n - \nu)$  Eigenlösungen zusammensetzt. Denn zwischen den  $(n - \nu)$  Vektoren  $z_\nu, z_{\nu+1}, \dots, z_{n-1}$  muß dann eine lineare Abhängigkeit bestehen.

Für die Auflösung der Gleichung (7) nach  $k_1, \dots, k_n$  genügt es nicht, daß die Determinante  $|z| = |z_0 z_1 \dots z_{n-1}|$  von Null verschieden ist. Auch die Determinante  $|\alpha \cdot z| = |z_1 z_2 \dots z_n|$  muß von Null verschieden sein (ausgenommen den Fall, in dem die Matrix  $\alpha$  einen Eigenwert  $\lambda = 0$  besitzt). Besteht nämlich zwischen den Vektoren  $z_\nu, z_{\nu+1}, \dots, z_n$  ( $\nu \leq 1$ ) eine lineare Abhängigkeit und ist andererseits  $|z| \neq 0$ , so führt Gleichung (7) zu dem Fehlschluß

$$(51) \quad k_n = k_{n-1} = \dots = k_{n-\nu+1} = 0.$$

Die  $(n - \nu)$  Eigenwerte, deren zugehörige Eigenlösungen in dem Vektor  $z_\nu$  enthalten sind, können allerdings auch in diesem Fall gemäß Abschnitt A 3 ohne weiteres berechnet werden.

Um eine lineare Abhängigkeit zwischen den  $(n - \nu + 1)$  Vektoren  $z_\nu, \dots, z_n$  und somit ein Verschwinden der Determinante  $|\alpha \cdot z|$  zu vermeiden, ist es notwendig, daß in jedem Vektor  $z_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) mindestens noch  $(n - \nu + 1)$  Eigenlösungen enthalten sind.

Sind die Vektoren  $z_\nu, \dots, z_n$  infolge nur angenäherten Verschwindens gewisser Eigenlösungen nicht völlig, sondern nur nahezu voneinander abhängig, so erhält man statt der Werte (51) für  $k_n, \dots, k_{n-\nu+1}$  zwar ungenaue, jedoch von Null verschiedene Werte, die gegebenenfalls unter Verwendung von Näherungsverfahren nachträglich verbessert werden können.

Aus Gleichung (50) ist ohne weiteres zu erkennen, daß ein rasches Verschwinden einzelner Eigenlösungen mit wachsendem  $\nu$  umso eher zu erwarten ist, je mehr die Eigenwerte voneinander verschieden, je kleiner also die Verhältniszahlen  $\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$  sind.

Zur Erläuterung diene ein Zahlenbeispiel, dessen Durchrechnung am Ende dieser Arbeit wiedergegeben ist. Die 4 Eigenwerte der 4-reihigen Matrix verhalten sich wie

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = 1 : 0,0368 : 0,00364 : 0,00054$$

Der Vektor  $\mathfrak{z}_0$  möge so gewählt sein, daß alle 4 Eigenlösungen mit etwa gleich großen Anteilen darin enthalten sind. Um sämtliche Eigenwerte zu erfassen, ist es, wie oben dargelegt, notwendig, daß in dem Vektor  $\mathfrak{z}_1$  noch alle 4 Eigenlösungen, in  $\mathfrak{z}_2$  mindestens 3 und in  $\mathfrak{z}_3$  mindestens 2 Eigenlösungen mit beachtlichen Anteilen enthalten sind. Infolge der großen Verschiedenheit der Eigenwerte sind aber die Anteile von  $\mathfrak{e}_4$  bzw.  $\mathfrak{e}_3$  und  $\mathfrak{e}_2$  gegenüber dem Anteil von  $\mathfrak{e}_1$  in den Vektoren  $\mathfrak{z}_1$  bzw.  $\mathfrak{z}_2$  und  $\mathfrak{z}_3$  bereits im Verhältnis der Werte

$$\frac{\lambda_4}{\lambda_1} = 0,00054, \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^2 = 0,00364^2 = 0,000013, \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^3 = 0,0368^3 = 0,00005$$

herabgesunken. Eine Durchführung der Rechnung unter Benutzung von 5 Dezimalstellen würde in diesem Falle nicht zum Ziele führen; denn der Anteil der Eigenlösung  $\mathfrak{e}_3$  in dem Vektor  $\mathfrak{z}_2$  würde bereits in der Ungenauigkeit der letzten Dezimalen völlig untergehen.

Dagegen genügt die Berücksichtigung von 8 Dezimalstellen, um selbst den kleinsten Eigenwert und die entsprechende Eigenlösung mit einer Genauigkeit von 2...3 Dezimalstellen und die größeren Eigenwerte mit entsprechend besserer Genauigkeit zu berechnen.

Es sei noch bemerkt, daß bei der Berechnung der kleineren Eigenwerte, sofern diese nur einen geringen Bruchteil des größten Eigenwertes ausmachen, auch bei Verwendung irgendwelcher anderer Verfahren die Bildung kleiner Differenzen aus großen Zahlen und folglich ein Genauigkeitsverlust um eine entsprechende Anzahl von Dezimalstellen nicht völlig vermieden werden kann. Man erkennt das am einfachsten, indem man die Diagonalelemente  $a_{\mu\mu}$  der Matrix  $\mathcal{A}$  beispielsweise um die Einheit der letzten bei der Rechnung berücksichtigten Dezimalstelle, also um einen Betrag, der in der Größenordnung unkontrollierbaren Rechenungenauigkeiten liegt, erhöht; hierdurch ändern sich alle Eigenwerte um diesen Betrag, der natürlich den größten Eigenwert nur sehr wenig, den kleinsten aber u.U. beträchtlich beeinflusst.

In dem am Schluß der Arbeit behandelten Zahlenbeispiel ergibt sich beispielsweise bei Hinzufügung des Wertes  $10^{-5}$  zu allen Diagonalgliedern (entsprechend einer Berücksichtigung von 5 und teilweise 6 Dezimalstellen)

für $\lambda_1$	3,40218	statt	3,40217
" $\lambda_2$	0,12512	"	0,12511
" $\lambda_3$	0,01240	"	0,01239
" $\lambda_4$	0,00186	"	0,00185

also für  $\lambda_4$  immerhin trotz Berücksichtigung von 5...6 Dezimalstellen eine Ungenauigkeit von etwa 0,5%.

## B. Zweites Verfahren

### B 1. Vorbemerkung

Das bisher betrachtete Verfahren bietet zwar einerseits gegenüber den gebräuchlichen elementaren Verfahren wesentliche Vorteile: einen besonders einfachen Rechnungsgang, verhältnismäßig geringen Arbeitsaufwand und die Möglichkeit, auch die Eigenlösungen mit mäßiger Rechenarbeit zu ermitteln.

Diesen Vorteilen steht aber der Nachteil gegenüber, daß man von den gesuchten Eigenwerten der Matrix oft nur einige mit befriedigender Genauigkeit, die andern dagegen ungenau oder überhaupt nicht findet. Die Ursache für ein solches Versagen kann sowohl in der ungünstigen Wahl des Anfangsvektors  $z_0$  als auch in den Eigenschaften der Matrix begründet sein. Im ersten Fall kann die Rechnung, wenn nötig, mit einem anderen Anfangsvektor wiederholt werden. Im zweiten Fall, der besonders bei vielreihigen Gleichungssystemen häufig vorkommen wird, können die kleineren oder wenig voneinander verschiedenen Eigenwerte oft nur durch Berücksichtigung einer sehr hohen Dezimalstellenzahl oder durch eine grundsätzliche Änderung des Rechnungsganges gewonnen werden.

Ein in diesem Sinne abgeändertes Verfahren, das jeden unnötigen Genauigkeitsverlust vermeidet, wird im folgenden behandelt. Bei diesem Verfahren wird die Bildung kleiner Differenzen aus großen Zahlen dadurch vermieden, daß aus jedem durch Multiplikation mit der Matrix  $\alpha$  errechneten Vektor bestimmte Komponenten eliminiert werden und daß hierdurch eine ausreichende lineare Unabhängigkeit der zur weiteren Rechnung benutzten Vektoren von vornherein sichergestellt wird.

### B 2. Ableitung des Verfahrens

Es sei beispielsweise wieder  $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ , also  $z_1 = \alpha \cdot z_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}$ .

Bereits in diesem Vektor wird die erste Komponente eliminiert:

$$z_1' = z_1 - \alpha_{10} z_0 \quad \text{warin} \quad \alpha_{10} = \alpha_{11}.$$

Man berechnet dann den Vektor  $z_2' = \alpha \cdot z_1'$  und eliminiert hieraus zuerst mit  $z_0$  die erste, dann mit  $z_1'$  die zweite Komponente

$$z_2' - \alpha_{20} z_0 - \alpha_{21} z_1' = z_2''.$$

Ebenso werden aus  $z_3'' = \alpha \cdot z_2''$  die ersten 3 Komponenten und allgemein aus dem Vektor

$$(52) \quad z_\nu^{(\nu-1)} = \alpha \cdot z_{\nu-1}^{(\nu-1)} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

die ersten  $\nu$  Komponenten eliminiert:

$$(53) \quad z_\nu^{(\nu-1)} - \alpha_{\nu 0} z_0 - \alpha_{\nu 1} z_1' - \alpha_{\nu 2} z_2'' - \dots - \alpha_{\nu, \nu-1} z_{\nu-1}^{(\nu-1)} = z_\nu^{(\nu)}$$

Die Elimination aller  $n$  Komponenten aus dem Vektor  $z_n^{(n-1)} = \alpha \cdot z_{n-1}^{(n-1)}$  ergibt

$$(54) \quad z_n^{(n-1)} - \alpha_{n0} z_0 - \alpha_{n1} z_1' - \dots - \alpha_{n, n-1} z_{n-1}^{(n-1)} = z_n^{(n)} = 0,$$

also eine lineare Beziehung zwischen  $z_n^{(n-1)}$  und den Vektoren  $z_\nu^{(\nu)}$  ( $\nu = 0, \dots, n-1$ ).

Die Koeffizienten  $\alpha_{\nu\mu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ;  $\mu = 0, 1, \dots, \nu-1$ ) können, wie im folgenden gezeigt wird, in einfacher Weise zur Ermittlung der gesuchten Koeffizienten  $k_1, \dots, k_n$  nach Gleichung (7) benutzt werden. Da jedoch die in Gleichung (7) enthaltenen Vektoren  $z_2, \dots, z_n$  nicht bekannt sind, muß zunächst der Zusammenhang zwischen diesen und den gemäß Gleichung (52) und (53) errechneten Vektoren  $z_\nu^{(\nu-1)}$  bzw.  $z_\nu^{(\nu)}$  festgestellt werden.

Die  $n$  Vektoren  $z_\nu^{(\nu)}$  ( $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ ) können in einer Matrix zusammengestellt werden

$$(55) \quad z' = (z_0 z_1' z_2'' \dots z_{n-1}^{(n-1)})$$

Zwischen dem Vektor  $z_\nu^{(\nu-1)}$  und den Spalten der Matrix  $z'$  besteht nach Gleichung (52) und (53) die Beziehung

$$(56) \quad z_\nu^{(\nu-1)} = \alpha \cdot z_{\nu-1}^{(\nu-1)} = \alpha_{\nu 0} z_0 + \alpha_{\nu 1} z_1' + \dots + \alpha_{\nu, \nu-1} z_{\nu-1}^{(\nu-1)} + z_\nu^{(\nu)} = z' \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 0} \\ \alpha_{\nu 1} \\ \dots \\ \alpha_{\nu, \nu-1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man kann nun die Vektoren  $z_\nu^{(\nu-1)}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) ebenfalls in einer Matrix zusammenfassen, und zwar ist nach Gleichung (55) und (56)

$$(57) \quad (z_1 z_2' z_3'' \dots z_n^{(n-1)}) = \alpha \cdot z' = z' \cdot p,$$

worin die Matrix  $p$  zur Abkürzung gesetzt ist für

$$(58) \quad p = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1, n-1} & \alpha_{1n} \\ 1 & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2, n-1} & \alpha_{2n} \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_{3, n-1} & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n, n-1} \end{pmatrix}$$

Wie später noch gezeigt wird, kann, gegebenenfalls durch geringfügige Änderung des Rechnungsganges, stets erreicht werden, daß die Determinante der Matrix  $z'$  von Null verschieden ist. Unter dieser Voraussetzung kann Gleichung (57) auch in folgender Weise geschrieben werden, indem man beide Seiten mit  $(z')^{-1}$  multipliziert,

$$(59) \quad (z')^{-1} \alpha z' = p, \quad z' p (z')^{-1} = \alpha$$

Hieraus folgt für jede Potenz  $\alpha^\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) und ebenso für jedes Polynom  $f(\alpha)$  der Matrix  $\alpha$

$$(60) \quad (z')^{-1} \cdot \alpha^\nu \cdot z' = [(z')^{-1} \alpha z']^\nu = p^\nu,$$

$$(61) \quad (z')^{-1} \cdot f(\alpha) \cdot z' = f[(z')^{-1} \alpha z'] = f(p).$$

Setzt man hierin für  $f(\alpha)$  das Polynom der Hamilton-Cayleyschen Gleichung (4)

$$\varphi(\alpha) \equiv \alpha^n + k_1 \alpha^{n-1} + \dots + k_{n-1} \alpha + k_n \mathcal{E},$$

so folgt aus  $\varphi(\alpha) = 0$  und Gleichung (61)

$$(62) \quad \varphi(p) \equiv p^n + k_1 p^{n-1} + \dots + k_{n-1} p + k_n \mathcal{E} = 0.$$

Die Hamilton-Cayleysche Gleichung bleibt also erfüllt, wenn man anstelle der Matrix  $\alpha$  die durch Gleichung (58) definierte Matrix  $p$  einsetzt.

Der Vollständigkeit halber sei noch gezeigt, daß die Matrizen  $\alpha$  und  $p$  genau die gleichen Eigenwerte besitzen, daß also jedem  $p_{(1)}$ -fachen Eigenwert  $\lambda_{(i)}$  der Matrix  $\alpha$  auch genau der  $p_{(1)}$ -fache Eigenwert  $\lambda_{(i)}$  der Matrix  $p$  entspricht.

Wie in Abschnitt A 4 gezeigt, kann man für die Matrix  $\alpha$  entsprechend ihren  $m$  ein- oder mehrfachen Eigenwerten  $\lambda_{(i)}$   $m$  Einheits-Teilmatrizen  $\mathcal{E}_{(i)}$  angeben, die die Bedingungen (33) und (35) erfüllen und zwar entspricht jedem  $p_{(1)}$ -fachen Eigenwert  $\lambda_{(i)}$  eine Einheits-Teilmatrix  $\mathcal{E}_{(i)}$  vom Range  $p_{(1)}$ . An Hand der Gleichungen (33') und (25 (35')) wurde nachgewiesen, daß diese Zerlegung eindeutig ist.

Die Matrix  $\mathcal{E}_{(i)}$  ist gemäß Gleichung (26) und (30) ein Polynom der Matrix  $\alpha$  :

$$\mathcal{E}_{(i)} = f(\alpha) \quad .$$

Das entsprechende Polynom der Matrix  $p$  sei

$$\mathcal{G}_{(i)} = f(p) \quad .$$

Aus Gleichung (61) folgt dann

$$(63) \quad (z')^{-1} \mathcal{E}_{(i)} z' = \mathcal{G}_{(i)} \quad .$$

Ebenso ist

$$(z')^{-1} \cdot (\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^{p_{(i)}} \cdot z' = (p - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^{p_{(i)}}$$

und folglich

$$(p - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^{p_{(i)}} \cdot \mathcal{G}_{(i)} = (z')^{-1} \cdot (\alpha - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^{p_{(i)}} \mathcal{E}_{(i)} \cdot z',$$

also nach Gleichung (33)

$$(64) \quad (p - \lambda_{(i)} \mathcal{E})^{p_{(i)}} \cdot \mathcal{G}_{(i)} = 0.$$

Andererseits folgt aus (63) und (35)

$$(65) \quad \sum_{i=1}^m \mathcal{G}_{(i)} = \sum_{i=1}^m (z')^{-1} \mathcal{E}_{(i)} z' = (z')^{-1} \cdot \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_{(i)} \cdot z' = (z')^{-1} \cdot \mathcal{E} \cdot z' = \mathcal{E}.$$

Die Matrizen  $\mathcal{Q}_{(i)}$  ( $i=1, \dots, m$ ) erfüllen also mit den Gleichungen (64) und (65) die hinreichenden Bedingungen (33) und (35) als Einheits-Teilmatrizen der Matrix  $\mathcal{P}$ . Da nach Gleichung (63) jede Matrix  $\mathcal{Q}_{(i)}$  ebenso wie die entsprechende Matrix  $\mathcal{E}_{(i)}$  den Rang  $p_{(i)}$  hat, folgt aus den Ausführungen des Abschnittes A 4, daß  $\lambda_{(i)}$  ein genau  $p_{(i)}$ -facher Eigenwert der Matrix  $\mathcal{P}$  ist.

Man kann also, nachdem man die Elemente  $\alpha_{\nu\mu}$  der Matrix  $\mathcal{P}$  ermittelt hat, irgend eines der bekannten Verfahren verwenden, um die Eigenwerte der Matrix  $\mathcal{P}$  zu berechnen. Diese stimmen mit den Eigenwerten der Matrix  $\mathcal{A}$  genau überein; es ist

$$(66) \quad |\lambda \mathcal{E} - \mathcal{P}| = |\lambda \mathcal{E} - \mathcal{A}| = \varphi(\lambda) = \prod_{i=1, \dots, m} (\lambda - \lambda_{(i)})^{p_{(i)}}.$$

Das Ausmultiplizieren der Determinante

$$(67) \quad |\lambda \mathcal{E} - \mathcal{P}| = \begin{vmatrix} (\lambda - \alpha_{10}) & -\alpha_{20} & -\alpha_{30} & \dots & -\alpha_{n-1,0} & -\alpha_{n0} \\ -1 & (\lambda - \alpha_{21}) & -\alpha_{31} & \dots & -\alpha_{n-1,1} & -\alpha_{n1} \\ 0 & -1 & (\lambda - \alpha_{32}) & \dots & -\alpha_{n-1,2} & -\alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (\lambda - \alpha_{n-1,n-2}) & -\alpha_{n,n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & (\lambda - \alpha_{n,n-1}) \end{vmatrix}$$

kann nach den bekannten elementaren Verfahren durchgeführt werden. Besonders einfach und übersichtlich gestaltet sich diese Rechnung, wenn man der Reihe nach die Spitzenunterdeterminanten

$$(68) \quad F_1 = (\lambda - \alpha_{10}), \quad F_2 = \begin{vmatrix} (\lambda - \alpha_{10}) & -\alpha_{20} \\ -1 & (\lambda - \alpha_{21}) \end{vmatrix}, \quad F_3 = \begin{vmatrix} (\lambda - \alpha_{10}) & -\alpha_{20} & -\alpha_{30} \\ -1 & (\lambda - \alpha_{21}) & -\alpha_{31} \\ 0 & -1 & (\lambda - \alpha_{32}) \end{vmatrix}$$

usw. und schließlich die Determinante

$$F_n = |\lambda \mathcal{E} - \mathcal{P}| = \varphi(\lambda)$$

berechnet.

Zwischen diesen Ausdrücken  $F_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) ergeben sich, wenn man die einzelnen Unterdeterminanten nach den Elementen ihrer letzten Spalte entwickelt, folgende Beziehungen:

$$(69) \quad \begin{aligned} F_2 &= (\lambda - \alpha_{21}) \cdot F_1 - \alpha_{20} \\ F_3 &= (\lambda - \alpha_{32}) \cdot F_2 - \alpha_{31} \cdot F_1 - \alpha_{30} \\ F_4 &= (\lambda - \alpha_{43}) \cdot F_3 - \alpha_{42} \cdot F_2 - \alpha_{41} \cdot F_1 - \alpha_{40} \\ &\dots \\ F_n &= (\lambda - \alpha_{n,n-1}) \cdot F_{n-1} - \alpha_{n,n-2} \cdot F_{n-2} - \dots - \alpha_{n1} \cdot F_1 - \alpha_{n0} \end{aligned}$$

Diese Rechnung ist am Schluß des vorliegenden Aufsatzes an einem Zahlenbeispiel durchgeführt.

Man könnte auch, um die Eigenwerte der Matrix  $\mathcal{P}$  zu bestimmen, nochmals das in Abschnitt A 1 beschriebene Verfahren benutzen, indem

man z.B. wieder ausgehend von einem Einheitsvektor  $\check{u}_0$  die Vektorenreihe

$$(70) \quad \check{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \check{u}_1 = P \cdot \check{u}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \check{u}_2 = P \cdot \check{u}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{10}^2 + \alpha_{20} \\ \alpha_{10} + \alpha_{21} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$$

berechnet. In der Matrix  $U = (\check{u}_0 \check{u}_1 \dots \check{u}_{n-1})$  verschwinden alle Elemente unter der Hauptdiagonale, und sämtliche Elemente der Hauptdiagonale selbst sind = 1. Die Auflösung des der Gleichung (7) entsprechenden linearen Gleichungssystems für  $k_1, \dots, k_n$

$$(71) \quad k_n \check{u}_0 + k_{n-1} \check{u}_1 + \dots + k_1 \check{u}_{n-1} = -\check{u}_0 \cdot n$$

erfordert daher an sich nur einen geringen Arbeitsaufwand. Allerdings können bei dieser Rechnung auch hier wieder rechnerische Schwierigkeiten durch Bildung kleiner Differenzen aus großen Zahlen auftreten. Dieser Nachteil wird bei unmittelbarem Ausmultiplizieren der Determinante  $|\lambda E - P|$  nach Gleichung (69) vermieden.

### B 3. Durchführung des Verfahrens bei völligem oder angenähertem Verschwinden eines Vektors $\check{z}_v^{(v)}$

Es bleibt noch nachzuweisen, daß man ohne grundsätzliche Änderung des Verfahrens stets erreichen kann, daß die Determinante der Matrix  $\check{z}'$  von Null verschieden ist. Bei der zu Beginn des Abschnittes B.2 angegebenen Vorschrift zur Bestimmung der Vektoren  $\check{z}_v^{(v)}$  ergibt sich in Gleichung (55) für  $\check{z}'$  eine Matrix, in der alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonale verschwinden. Falls alle Hauptdiagonalelemente der Matrix  $\check{z}'$ , also die ersten, nicht absichtlich eliminierten Komponenten der Vektoren  $\check{z}_v^{(v)}$  von Null verschieden sind, so ist die Determinante der Matrix  $\check{z}'$  gleich dem Produkt dieser Diagonalelemente, also ebenfalls von Null verschieden.

Verschwindet jedoch bei der Elimination der ersten  $v$  Komponenten aus dem Vektor  $\check{z}_v^{(v-1)}$  gemäß Gleichung (53) zufällig auch die  $(v+1)$ -te Komponente, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

α.) Der Vektor  $\check{z}_v^{(v)}$  ( $v < n$ ) verschwindet völlig. Dieser Fall tritt ein, wenn aus einem der in Abschnitt A 3 und 4 behandelten Gründe die Vektoren  $\check{z}_0, \check{z}_1, \dots, \check{z}_v$  voneinander linear abhängig sind. Mit verschwindendem Vektor  $\check{z}_v^{(v)}$  verschwinden auch alle folgenden Spalten der Matrix  $\check{z}'$ , sowie auch die Determinante dieser Matrix.

Man kann jedoch den Vektor  $\check{z}_v^{(v)}$  als Grenzwert eines Ausdrucks  $\delta \cdot \bar{\check{z}}_v^{(v)}$  betrachten, worin  $\bar{\check{z}}_v^{(v)}$  ein beliebiger von Null verschiedener Vektor und  $\delta$  ein kleiner, im Grenzfall verschwindender, skalarer Faktor sei. Für  $\bar{\check{z}}_v^{(v)}$  wählt man am besten die  $(v+1)$ -te Spalte der Einheitsmatrix, also einen Einheitsvektor, dessen

$(\nu+1)$ -te Komponente = 1, alle übrigen Komponenten = 0 sind.

Anstelle der genauen Schreibweise  $\mathfrak{z}_\nu^{(\nu)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \cdot \bar{\mathfrak{z}}_\nu^{(\nu)}$  möge im folgenden kurz  $\mathfrak{z}_\nu^{(\nu)} = \delta \cdot \bar{\mathfrak{z}}_\nu^{(\nu)}$  geschrieben werden, worin im Grenzfall  $\delta = 0$  zu setzen ist.

Für die weitere Rechnung wird statt des verschwindenden Vektors  $\mathfrak{z}_\nu^{(\nu)}$  der von Null verschiedene Vektor  $\bar{\mathfrak{z}}_\nu^{(\nu)}$  benutzt. Man berechnet also nach Gleichung (52) den Vektor  $\bar{\mathfrak{z}}_{\nu+1}^{(\nu)} = \alpha \cdot \bar{\mathfrak{z}}_\nu^{(\nu)}$  und eliminiert dessen  $(\nu+1)$  erste Komponenten gemäß Gleichung (53)

$$(72) \quad \bar{\mathfrak{z}}_{\nu+1}^{(\nu)} - \bar{\alpha}_{\nu+1,0} \mathfrak{z}_0 - \bar{\alpha}_{\nu+1,1} \mathfrak{z}_1 - \dots - \bar{\alpha}_{\nu+1,\nu-1} \mathfrak{z}_{\nu-1} - \bar{\alpha}_{\nu+1,\nu} \bar{\mathfrak{z}}_\nu^{(\nu)} = \bar{\mathfrak{z}}_{\nu+1}^{(\nu+1)}$$

Dabei ist nur zu beachten, daß man, um  $\mathfrak{z}_{\nu+1}^{(\nu)}$  bzw.  $\mathfrak{z}_{\nu+1}^{(\nu+1)}$  zu erhalten, die Vektoren  $\bar{\mathfrak{z}}_{\nu+1}^{(\nu)}$  bzw.  $\bar{\mathfrak{z}}_{\nu+1}^{(\nu+1)}$  noch mit dem Faktor  $\delta$  multiplizieren muß

$$(73) \quad \begin{aligned} \mathfrak{z}_{\nu+1}^{(\nu+1)} &= \delta \cdot \bar{\mathfrak{z}}_{\nu+1}^{(\nu+1)} = \delta \cdot \bar{\mathfrak{z}}_{\nu+1}^{(\nu)} - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \delta \cdot \bar{\alpha}_{\nu+1,\mu} \mathfrak{z}_\mu^{(\mu)} - \delta \cdot \bar{\alpha}_{\nu+1,\nu} \bar{\mathfrak{z}}_\nu^{(\nu)}, \\ &= \mathfrak{z}_{\nu+1}^{(\nu)} - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (\delta \cdot \bar{\alpha}_{\nu+1,\mu}) \cdot \mathfrak{z}_\mu^{(\mu)} - \bar{\alpha}_{\nu+1,\nu} \mathfrak{z}_\nu^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die in die Matrix  $\mathfrak{P}$  aufzunehmenden Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu+1,\mu} &= \delta \cdot \bar{\alpha}_{\nu+1,\mu} \longrightarrow 0 \quad \text{für } \mu = 0, 1, \dots, \nu-1 \\ \text{und} \\ \alpha_{\nu+1,\nu} &= \bar{\alpha}_{\nu+1,\nu}. \end{aligned}$$

Allgemein erhält man für die folgenden Vektoren  $\bar{\mathfrak{z}}_{\nu+p}^{(\nu+p)}$  und  $\mathfrak{z}_{\nu+p}^{(\nu+p)}$

$$(72') \quad \bar{\mathfrak{z}}_{\nu+p}^{(\nu+p)} = \alpha \cdot \bar{\mathfrak{z}}_{\nu+p-1}^{(\nu+p-1)} - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \bar{\alpha}_{\nu+p,\mu} \mathfrak{z}_\mu^{(\mu)} - \sum_{\mu=\nu}^{\nu+p-1} \bar{\alpha}_{\nu+p,\mu} \bar{\mathfrak{z}}_\mu^{(\mu)}$$

$$(73') \quad \mathfrak{z}_{\nu+p}^{(\nu+p)} = \delta \cdot \bar{\mathfrak{z}}_{\nu+p}^{(\nu+p)} = \alpha \cdot \mathfrak{z}_{\nu+p-1}^{(\nu+p-1)} - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (\delta \cdot \bar{\alpha}_{\nu+p,\mu}) \cdot \mathfrak{z}_\mu^{(\mu)} - \sum_{\mu=\nu}^{\nu+p-1} \bar{\alpha}_{\nu+p,\mu} \mathfrak{z}_\mu^{(\mu)},$$

also

$$(74) \quad \alpha_{\nu+p,\mu} = \delta \cdot \bar{\alpha}_{\nu+p,\mu} \longrightarrow 0 \quad \text{für } \mu = 0, 1, \dots, \nu-1$$

und

$$(75) \quad \alpha_{\nu+p,\mu} = \bar{\alpha}_{\nu+p,\mu} \quad \text{für } \mu = \nu, \nu+1, \dots, \nu+p-1.$$

Falls im weiteren Verlauf der Rechnung auch noch einer der Vektoren  $\bar{\mathfrak{z}}_{\nu+p}^{(\nu+p)}$  verschwindet, so kann man durch den Ansatz  $\bar{\mathfrak{z}}_{\nu+p}^{(\nu+p)} = \delta_2 \cdot \bar{\bar{\mathfrak{z}}}_{\nu+p}^{(\nu+p)}$  mit  $\delta_2 \rightarrow 0$  auch hier wieder einen endlichen Vektor einführen und diesen Ansatz gegebenenfalls auch bei noch weiteren verschwindenden Vektoren wiederholen.

Zur Erläuterung diene das am Ende von Abschnitt A 3 benutzte Zahlenbeispiel.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 & -6 \\ -3 & 3 & 14 & -9 \\ -1 & -6 & -9 & 21 \end{pmatrix} \quad z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad z_1' = z_1 - 6z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$z_2' = \begin{pmatrix} 19 \\ 12 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix} \quad z_2'' = z_2' - 19z_0 - 4z_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ -8 \end{pmatrix} \quad z_3'' = \begin{pmatrix} 44 \\ 12 \\ -96 \\ -60 \end{pmatrix} \quad z_3''' = z_3'' - 44z_0 - 4z_1' - 7z_2'' = 0.$$

Um die Rechnung fortsetzen zu können, wird  $\bar{z}_3''' = \delta \cdot \bar{z}_3'''$  gesetzt:

$$\bar{z}_3''' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{z}_4''' = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -9 \\ 21 \end{pmatrix} \quad \bar{z}_4^{(4)} = \bar{z}_4''' + 1 \cdot z_0 + 2 \cdot z_1' - 1,25 z_2'' - 29 \bar{z}_3''' = 0$$

Man erhält also, indem man die Koeffizienten  $\alpha_{\nu\mu}$  in der gezeigten Weise in der Matrix  $\mathfrak{p}$  zusammenstellt

$$\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} 6 & 19 & 44 & -\delta \\ 1 & 4 & 4 & -2\delta \\ 0 & 1 & 7 & 1,25\delta \\ 0 & 0 & 1 & 29 \end{pmatrix},$$

worin  $\delta = 0$  zu setzen ist. Man überzeugt sich leicht, daß sämtliche Eigenwerte dieser Matrix mit denen der Matrix  $\alpha$  übereinstimmen.

$\beta$ .) In dem Vektor  $z_\nu^{(\nu)}$  verschwindet zwar außer den ersten  $\nu$  Komponenten auch die  $(\nu+1)$ -te Komponente, jedoch ist mindestens eine, z.B. die  $(\nu+\rho)$ -te Komponente des Vektors von Null verschieden.

In diesem Fall ist eine grundsätzliche Änderung des Verfahrens nicht notwendig. Man muß dann nur in den folgenden Vektoren  $z_{\nu+1}^{(\nu)}$  usw. statt der  $(\nu+1)$ -ten Komponente die  $(\nu+\rho)$ -te Komponente eliminieren.

Eine derartige Änderung in der Reihenfolge der zu eliminierenden Komponenten ist übrigens auch in anderen Fällen u.U. vorteilhaft. Um auch den geringsten unnötigen Genauigkeitsverlust durch Differenzbildungen zu vermeiden, empfiehlt es sich, bei der Berechnung des Vektors  $z_{\nu+1}^{(\nu)}$  außer denjenigen Komponenten, die bereits in  $z_\nu^{(\nu)}$  eliminiert wurden, noch diejenige Komponente zu eliminieren, die in  $z_\nu^{(\nu)}$  mit dem größten Betrage vorkommt. Ein wesentlicher Einfluß auf die Genauigkeit der Ergebnisse ist allerdings nur bei beträchtlicher Verschiedenheit der Komponenten von  $z_\nu^{(\nu)}$  zu erwarten.

#### B 4. Bestimmung der Eigenlösungen

Auch die Eigenlösungen können ähnlich wie bei den zuerst behandelten einfachen Verfahren mit verhältnismäßig geringem Arbeitsaufwand berechnet werden. Es sei hierfür der in Abschnitt B 2 angegebene Rechnungsverlauf vorausgesetzt, wobei die einzelnen Komponenten der Vektoren in ihrer gegebenen Reihenfolge eliminiert werden.

$z_0$  sei also die erste Spalte der Einheitsmatrix; dann ist

$$(76) \quad z_0 = z' \cdot z_0$$

und folglich nach Gleichung (6) und (57) bzw. (60)

$$(77) \quad z_\nu = a^\nu \cdot z_0 = a^\nu \cdot z' \cdot z_0 = z' \cdot p^\nu \cdot z_0$$

Nach Gleichung (70) ist ferner

$$u_\nu = p^\nu \cdot z_0$$

also

$$(78) \quad z_\nu = z' \cdot u_\nu$$

und folglich

$$(79) \quad z = (z_0 z_1 \dots z_{n-1}) = z' \cdot (u_0 u_1 \dots u_{n-1}) = z' \cdot u$$

Man kann also die Vektoren  $z_\nu$  aus den Vektoren  $z_\nu^{(\nu)}$  in einfacher Weise berechnen. Nach Ermittlung der Eigenwerte kann man also auf dem früher gezeigten Wege auch die entsprechenden Eigenlösungen der Matrix  $a$  ermitteln.

#### B 5. Praktische Durchführung des Verfahrens

Das in diesem Abschnitt behandelte Verfahren erscheint zunächst wesentlich umständlicher und weniger übersichtlich als das zuerst angegebene Verfahren, besonders weil dabei abwechselnd zwei verschiedenartige Rechnungen auszuführen sind: Die Berechnung der Vektoren  $z_\nu^{(\nu-1)}$  durch Multiplikation des Vektors  $z_{\nu-1}^{(\nu-1)}$  mit der Matrix  $a$  und die Berechnung des Vektors  $z_\nu^{(\nu)}$  durch Elimination der ersten  $\nu$  Komponenten aus dem Vektor  $z_\nu^{(\nu-1)}$ . Es soll deswegen noch gezeigt werden, wie man auch diese Rechnung recht übersichtlich anordnen kann.

Nach Gleichung (56) ist

$$\alpha_{\nu 0} z_0 + \alpha_{\nu 1} z_1 + \dots + \alpha_{\nu, \nu-1} z_{\nu-1}^{(\nu-1)} + z_\nu^{(\nu)} = a \cdot z_{\nu-1}^{(\nu-1)}$$

In dieser Gleichung mögen die Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{\nu-1}^{(\nu-1)}$  bereits bekannt sein. Bezeichnet man die  $\rho$ -te Komponente des Vektors  $z_\mu^{(\mu)}$



Der Gang der Rechnung ist folgender: Die Vektoren  $z_0, z_1, \dots, z_{\nu-1}^{(\nu-1)}$  mögen bereits berechnet und in das obige Schema eingetragen sein. Die  $\nu$ -te Zeile der unteren Matrix, von der zunächst nur die Komponenten des Vektors  $z_{\nu-1}^{(\nu-1)}$  bekannt sind, wird nun der Reihe nach mit der 1, 2, ...,  $\nu$ -ten Zeile der oberen Matrix multipliziert, wobei gemäß Gleichung (82) alle diese Produkte verschwinden müssen. Das Produkt mit der 1. Zeile der oberen Matrix enthält als einzige Unbekannte das Element  $-\alpha_{\nu 0}$ , das Produkt mit der 2. Zeile (nachdem  $\alpha_{\nu 0}$  bekannt ist) als einzige Unbekannte das Element  $-\alpha_{\nu 1}$  usw.; man kann also jedesmal unter Benutzung der bereits bekannten Elemente aus dem Produkt der  $\nu$ -ten Zeile der unteren Matrix mit der  $\rho$ -ten Zeile der oberen Matrix ( $\rho = 1, 2, \dots, \nu$ ) gemäß der Gleichung

$$(84) \quad \sum_{k=1}^n \alpha_{\rho k} z_{\nu-1, k}^{(\nu-1)} + \sum_{\mu=0}^{\rho-2} z_{\mu \rho}^{(\mu)} \cdot (-\alpha_{\nu \mu}) = -z_{\rho-1, \rho}^{(\rho-1)} \cdot (-\alpha_{\nu, \rho-1})$$

unter Benutzung der bereits bekannten Elemente  $-\alpha_{\nu \mu}$  ( $\mu = 0, 1, \dots, \rho-2$ ) das Element  $-\alpha_{\nu, \rho-1}$  berechnen. Man bilde also jeweils das Produkt aus dem bereits bekannten Teil der  $\nu$ -ten Zeile der unteren Matrix mit der betreffenden Zeile der oberen Matrix. Das Ergebnis (gleich der linken Seite von Gleichung (84)) ist noch durch  $-z_{\rho-1, \rho}^{(\rho-1)}$  zu dividieren.  $z_{\rho-1, \rho}^{(\rho-1)}$  ist dasjenige Diagonalelement der Matrix  $z'$ , das in der gleichen Spalte steht wie das zu berechnende Element  $-\alpha_{\nu, \rho-1}$ . Es empfiehlt sich, diese Elemente der Matrix  $z'$  in dem obigen Schema durch Unterstreichung oder stärkere Schrift besonders hervorzuheben.

### C. Durchrechnung eines praktischen Zahlenbeispiels

Nachdem die in den obigen Ausführungen eingefügten Zahlenbeispiele lediglich zur Erläuterung dienten, soll zum Schluß noch die praktische Anwendung der beiden Verfahren gezeigt werden.

Das folgende Zahlenbeispiel ist dem bekannten Buch "Technische Dynamik" von B i e z e n o und G r a m m e l, S. 823 entnommen. Es betrifft die Berechnung der Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen einer Welle, die mit vier punktförmig angenommenen Massen besetzt ist. Die sich ergebende Matrix, deren Eigenwerte  $\lambda_i = \frac{c}{\omega_i^2}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) dem Quadrat der gesuchten Eigenfrequenzen  $\omega_i$ , umgekehrt proportional sind, lautet:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0,50948 & 0,58927 & 1,25 & 0,61206 & 1,5 & 0,56932 \\ 0,58927 & 0,70929 & 1,25 & 0,75656 & 1,5 & 0,71906 \\ 0,61206 & 0,75656 & 1,25 & 0,83507 & 1,5 & 0,81930 \\ 0,56932 & 0,71906 & 1,25 & 0,81930 & 1,5 & 0,85261 \end{pmatrix}$$

G 1. Anwendung des ersten Verfahrens

a) Berechnung der Vektoren  $z_v = \alpha \cdot z_0$ :

$$z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z_1 = \begin{pmatrix} 0,50948 \\ 0,58927 \\ 0,61206 \\ 0,56932 \end{pmatrix} \quad z_2 = \begin{pmatrix} 1,5612687 \\ 1,9110726 \\ 2,0962074 \\ 2,0687155 \end{pmatrix} \quad z_3 = \begin{pmatrix} 5,2919705 \\ 6,4891927 \\ 7,1318790 \\ 7,0555270 \end{pmatrix} \quad z_4 = \begin{pmatrix} 18,001741 \\ 22,075758 \\ 24,263880 \\ 24,006298 \end{pmatrix}$$

b) Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$k_4 z_0 + k_3 z_1 + k_2 z_2 + k_1 z_3 = -z_4 :$$

Die Unbekannte  $k_4$  kommt nur in der obersten Gleichung vor:

$$k_4 + 0,50948 k_3 + 1,5612687 k_2 + 5,2919705 k_1 = -18,001741.$$

Elimination von  $k_3$  (Division der zweiten Gleichung durch den Koeffizienten von  $k_3$  und Auslöschung der entsprechenden Koeffizienten in den beiden letzten Gleichungen):

$$\begin{array}{rcll} k_3 & + & 3,2431188 & k_2 + 11,012257 & k_1 & = & -37,462891 \\ 0 & & 0,11122414 & k_2 + 0,39171699 & k_1 & = & -1,3343427 \\ 0 & & 0,22234309 & k_2 + 0,78602889 & k_1 & = & -2,6779253 \end{array}$$

Elimination von  $k_2$  (entsprechend wie bei  $k_3$ ):

$$\begin{array}{rcll} k_2 & + & 3,5218703 & k_1 & = & -11,996880 \\ & & 0,002965295 & k_1 & = & -0,01050171 \end{array}$$

Hieraus:

$$\begin{array}{rcll} & & & k_1 & = & -3,541540 \\ & & & k_2 & = & +0,475964 \\ & & & k_3 & = & -0,006150 \\ & & & k_4 & = & +0,000010 \end{array}$$

c) Berechnung der Eigenwerte als Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^4 - 3,541540 \lambda^3 + 0,475964 \lambda^2 - 0,006150 \lambda + 0,000010 = 0$$

Die Auflösung, die zweckmäßig mittels bekannter Näherungsverfahren durchgeführt wird, ergibt

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 3,402171 & (3,40217) \\ \lambda_2 = 0,125116 & (0,125103) \\ \lambda_3 = 0,012351 & (0,0123991) \\ \lambda_4 = 0,001902 & (0,0018525) \end{array}$$

Zum Vergleich sind die in oben genannter Quelle angegebenen, auf anderem Wege errechneten Werte für  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  in Klammern hinzugefügt. Die Abweichungen überschreiten nicht wesentlich die Größenordnung derjenigen Ungenauigkeiten, die, wie am Schlusse von Abschnitt A 5 gezeigt, bereits durch die begrenzte Dezimalstellenzahl der Elemente der gegebenen Matrix  $\alpha$  bedingt sind. Immerhin ist besonders bei den kleineren Eigenwerten ein zusätzlicher Genauigkeitsverlust zu erkennen, der durch das genauere zweite Verfahren (Abschnitt B) vermieden werden kann.

d) Berechnung von Eigenlösungen

Gesucht sei beispielsweise die dem größten Eigenwert  $\lambda_1 = 3,402171$  entsprechende Eigenlösung  $e_1$ . Aus den Werten  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  findet man

$$\begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0,139369 \\ \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_4 &= 0,0018068 \\ \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 &= 0,00000294 \end{aligned}$$

und hieraus gemäß Gleichung (14) ohne Berücksichtigung des skalaren Faktors im Nenner

$$\begin{aligned} e_1 &= z_3 - 0,139369 z_2 + 0,0018068 z_1 - 0,00000294 z_0 \\ &= \begin{pmatrix} 5,075 & 2956 \\ 6,223 & 9131 \\ 6,840 & 8385 \\ 6,768 & 2408 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Probe  $\alpha \cdot e_1 = \lambda_1 \cdot e_1$  ergibt in diesem Fall eine sehr gute Übereinstimmung:

$$\alpha \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 17,267 & 0237 \\ 21,174 & 8166 \\ 23,273 & 7024 \\ 23,026 & 7127 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = (\alpha e_1) : e_1 = \begin{cases} 3,402 & 17104 \\ 3,402 & 17099 \\ 3,402 & 17101 \\ 3,402 & 17101 \end{cases}$$

Die anderen Eigenlösungen  $e_2, e_3$  und  $e_4$  ergeben sich ebenso wie die entsprechenden Eigenwerte mit einer geringeren Genauigkeit. Falls dabei die Probe  $\alpha \cdot e_i = \lambda_i \cdot e_i$  ergibt, daß die erzielte Genauigkeit nicht ausreicht, so kann man oft mit verhältnismäßig geringem Arbeitsaufwand durch Anwendung von Näherungsverfahren die gewünschte Genauigkeit erreichen.

02. Anwendung des zweiten Verfahrens

a) Berechnung der Matrix

0,50948	0,58927	0,765075	0,85398	1	0	0
0,58927	0,70929	0,94570	1,07859	0	0,58927	0
0,61206	0,75656	1,043838	1,22895	0	0,61206	0,111224
0,56932	0,71906	1,024125	1,278915	0	0,56932	0,222342
						0,0029656
1	0	0	0	-0,50948		(-1)
0	0,58927	0,61206	0,56932	-1,30170	-2,73364	(-1)
0	0	0,111224	0,222342	-0,274970	-0,585471	-0,278750
0	0	0	0,0029656	-0,0025326	-0,0054282	-0,0028968
						-0,019654

Die Anordnung der Rechnung ist die gleiche wie in Abschnitt B 5 angegeben: Oben links steht die Matrix  $\alpha$ , rechts daneben die Matrix  $\beta'$ , deren einzelne Elemente sich als Produkte aus den Zeilen der oberen und unteren Matrix ergeben. Rechts unten findet man der Reihe nach die Elemente  $-\alpha_{ii}$  der Matrix  $-\mathcal{P}$  als Produkt aus den Zeilen der beiden rechteckigen Matrizen, dividiert durch das betreffende Diagonalelement der Matrix  $\beta'$ . Die Matrix  $\mathcal{P}$  lautet:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,50948 & 1,30170 & 0,274970 & 0,0025326 \\ 1 & 2,73364 & 0,585471 & 0,0054282 \\ & 1 & 0,278750 & 0,0028968 \\ & & 1 & 0,019654 \end{pmatrix}$$

b) Ausmultiplizieren der Determinante  $|\lambda \mathcal{P} - \mathcal{P}|$  nach Gleichung (69)

$$F_1 = \lambda - 0,50948$$

$$F_2 = \lambda^2 - 3,24312 \lambda + 0,09103$$

$$F_3 = \lambda^3 - 3,52187 \lambda^2 + 0,40958 \lambda - 0,002060$$

$$\varphi(\lambda) = F_4 = \lambda^4 - 3,54152 \lambda^3 + 0,47590 \lambda^2 - 0,006143 \lambda + 0,0000098$$

c) Auflösung der Gleichung  $\varphi(\lambda) = 0$

Man erhält

$$\lambda_1 = 3,402169, \lambda_2 = 0,125109, \lambda_3 = 0,012382, \lambda_4 = 0,0018595.$$

Die gesamte Rechnung wurde hier mit 6-ziffrigen Zahlen durchgeführt. Die genauen, unter Berücksichtigung von 8 Dezimalstellen berechneten Werte betragen:

$$\lambda_1 = 3,4021710, \lambda_2 = 0,1251075, \lambda_3 = 0,0123908, \lambda_4 = 0,0018532.$$

Die mit 6 Dezimalstellen erreichte Genauigkeit ist also recht gut und besonders für die kleineren Eigenwerte wesentlich besser als bei den Werten, die oben nach dem ersten Verfahren unter Berücksichtigung von 8 Dezimalstellen gefunden wurden.

d) Berechnung der Eigenlösungen

Die Berechnung der Matrizen  $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_0 \dots \mathcal{U}_3)$  nach Gleichung (70) und  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}' \cdot \mathcal{U}$  nach Gleichung (79) erfordert, nachdem die Matrizen  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Z}'$  bekannt sind, nur eine geringe Rechenarbeit.

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0,50948 & 1,56127 & 5,29198 \\ 0 & 1 & 3,24312 & 11,01226 \\ 0 & 0 & 1 & 3,52187 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}' \cdot \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0,50948 & 1,56127 & 5,29198 \\ 0 & 0,58927 & 1,91107 & 6,48919 \\ 0 & 0,61206 & 2,09620 & 7,13188 \\ 0 & 0,56932 & 2,06872 & 7,05552 \end{pmatrix}$$

Aus den Spalten  $\mathcal{Z}_0, \dots, \mathcal{Z}_3$  der Matrix  $\mathcal{Z}$  und aus den bekannten Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  können die Eigenlösungen nach dem in Abschnitt A 2 behandelten Verfahren in einfacher Weise berechnet werden.

Zusammenfassung:

Für die numerische Auflösung der bei der Berechnung freier periodischer Schwingungsvorgänge vorkommenden Gleichungssysteme werden zwei Verfahren behandelt, die auf einer Anwendung der Hamilton-Cayleyschen Gleichung beruhen.

Das erste Verfahren zeichnet sich durch einen besonders einfachen und übersichtlichen Rechnungsgang aus und erfordert, verglichen mit anderen Verfahren, nur einen geringen Aufwand an Rechenarbeit. Auch die Berechnung der Eigenlösungen ist hierbei in einfacher Weise und mit geringem Arbeitsaufwand möglich. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist, daß in gewissen Fällen ein Teil der Eigenwerte und Eigenlösungen infolge der Berechnung kleiner Differenzen aus großen Zahlen nur ungenau oder überhaupt nicht gefunden wird.

Es wurde deshalb, auf dem gleichen Grundgedanken aufbauend, noch ein zweites Verfahren entwickelt, das diesen Nachteil vermeidet. Durch geeignete Anordnung kann die Rechnung auch bei diesem Verfahren recht einfach und übersichtlich gestaltet werden. Auch hier kann man nach Ermittlung der Eigenwerte leicht und mit geringer Rechenarbeit die Eigenlösungen bestimmen.

Die Durchrechnung eines Zahlenbeispiels erläutert die praktische Anwendung der beiden Verfahren.